Grenzwerte

Carlo Vöst, Olivia, Spanien
Illustrationen von C. Vöst

© Robert Brook/The Image Bank/ Getty Images Plus

Interessant ist das Verhalten von Funktionen in Bereichen, welche nicht unmittelbar zugänglich sind, z. B. im Unendlichen oder in der Umgebung von Definitionslücken. Dieser Beitrag stellt den theoretischen Hintergrund vor, vertieft das Wissen der Lernenden anhand von Aufgaben und bietet Ihnen die Möglichkeit, Ihre Schüler und Schülerinnen mit einer Klassenarbeit zu testen.

VORANSICHT

VORANSICHT

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible]a-Greta Witt[illegible]ebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Robert Brook/The Image Bank/ Getty Images Plus
Illustrationen: Carlo Vöst, Olivia, Spanien
Lektorat: M[illegible]na Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Daniela Link, Mönchengladbach

Grenzwerte

Oberstufe (grundlegend, weiterführend)

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst

Die Schüler lernen:

verschiedene Grenzwertbetrachtungen und Verfahren zur Berechnung in der Theorie und Praxis anhand zahlreicher Beispiele und Aufgaben kennen.

© RAABE 2021

VORANSICHT

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle **TA** = Tafelanschrift

Thema	Material	Methode
Grenzwerte für $x \to \pm\infty$	M 1	Ab
Divergenz	M 2	Ab
Grenzwertsätze	M 3	Ab, TA
Grenzwerte für $x \to x_0$	M 4	Ab
Die Regeln von de L'Hospital	M 5	Ab, TA
Aufgaben	M 6	Ab
Klassenarbeit	M 7	LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalte: Grenzwertbegriff, Grenzwerte $x \to \pm\infty$, Grenzwerte $x \to x_0$, Konvergenz, bestimmte und unbestimmte Divergenz, Grenzwertsätze, Regeln von de L'Hospital

Medien: GTR/CAS

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

© RAABE 2021

VORANSICHT

M 1 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Anmerkung: Die Schreibweise $x \to \pm\infty$ bedeutet, dass man das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to +\infty$ und auch für $x \to -\infty$ betrachtet, also für immer größer werdende positive und negative Werte von x.

Wir verschaffen uns zunächst anhand eines Funktionsbeispiels mit einer Wertetabelle einen Überblick für x-Werte von –1 000 000 bis +1 000 000 über das Verhalten der Funktionswerte.

Beispiel: $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}; \mathbb{D}_{f,max} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
–1 000 000	2,0000	–3,4	[illegible]	2	1,8000
–100 000	2,0000	–3,3	[illegible]	3	1,8333
–10 000	2,0001	–3,2	[illegible]	5	1,8750
–5000	2,0002	[illegible]	12,0000	6	1,8889
–2000	2,0005	–3,01	[illegible]	7	1,9000
–1000	2,0010	[illegible]	[illegible]	10	1,9231
–500	2,0020	[illegible]	–998,0000	20	1,9565
–200	2,0051	–2,99	[illegible]	30	1,9697
–100	2,0103	–2,9	–8,0000	40	1,9767
–50	2,0213	–2,8	–3,0000	50	1,9811
–40	2,0270	–2,7	–1,3333	100	1,9903
–30	[illegible]	–2,6	–0,5000	200	1,9951
–20	[illegible]	–2,5	0,0000	300	1,9967
–10	[illegible]	–2	1,0000	400	1,9975
[illegible]	[illegible]	–1,5	1,3333	500	1,9980
–8	[illegible]	–1	1,5000	1000	1,9990
–7	2,2500	–0,5	1,6000	2000	1,9995
[illegible]	[illegible]	0	1,6667	5000	1,9998
–5	2,5000	0,5	1,7143	10 000	1,9999
–4	3,0000	1	1,7500	100 000	2,0000
[illegible]	4,0000	1,5	1,7778	1 000 000	2,0000

VORANSICHT

© RAABE 2021

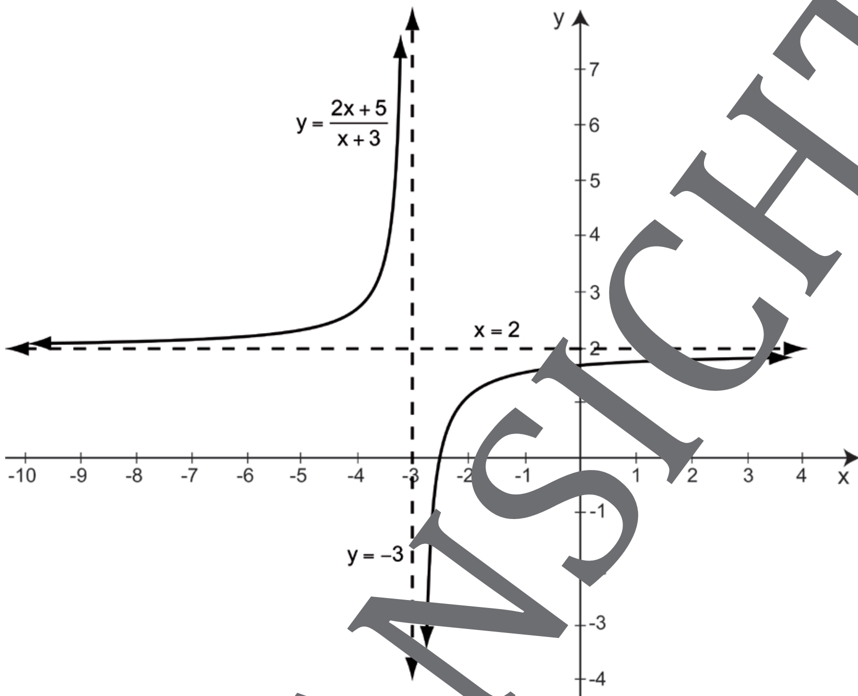

Abb. 1, Grafik: Carlo Vöst

Wenn wir die Wertetabelle oder auch den Verlauf des Graphen betrachten, vermuten wir Folgendes:

Wenn x immer größer und größer wird, d. h.: $x \to +\infty$, dann gehen die Funktionswerte $f(x)$ gegen 2 (von unten), d. h.: $f(x) \to 2-0$; Symbolik: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2-0$.

Wenn x immer kleiner und kleiner wird, d. h.: $x \to -\infty$, dann gehen die Funktionswerte $f(x)$ gegen 2 (von oben), d. h.: $f(x) \to 2+0$; Symbolik: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2+0$.

Wenn x immer mehr gegen −3 von rechts geht, d. h.: $x \to -3+0$, dann werden die Funktionswerte $f(x)$ immer kleiner und kleiner, d. h.: $f(x) \to -\infty$; Symbolik: $\lim\limits_{x\to-3+0} f(x) = -\infty$.

Wenn x immer mehr gegen −3 von links geht, d. h.: $x \to -3-0$, dann werden die Funktionswerte $f(x)$ immer größer und größer, d. h.: $f(x) \to +\infty$; Symbolik: $\lim\limits_{x\to-3+0} f(x) = +\infty$.

VORANSICHT

© RAABE 2021

Beispiele für unbestimmte Divergenz:

$f_1(x) = \sin x$ $\qquad$ $f_2(x) = x \cdot \sin x$, (siehe Abbildung)

Oder: $f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

In allen drei Beispielen gibt es keinen Grenzwert für $x \to \pm\infty$. Die Funktionen sind also divergent. Die Funktionswerte der Sinusfunktionen schwanken hin und her, sie laufen also im unendlichen nicht gegen plus oder minus unendlich. Damit sind die Sinusfunktionen unbestimmt divergent. Auch die Funktionswerte von f_3 springen ständig zwischen 1 und –1 hin und her, streben also auch nicht gegen plus oder minus unendlich.

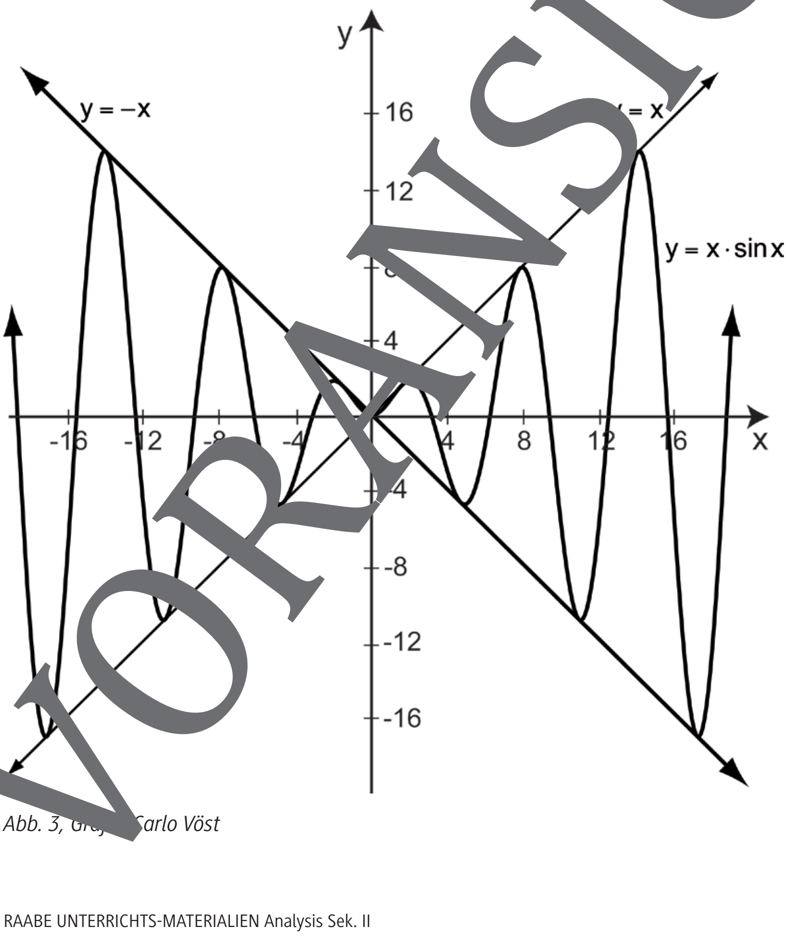

Abb. 3, Grafik: Carlo Vöst

© RAABE 2021

VORANSICHT

RAABE, KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!

Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de