# Einen Funktionsterm zu gegebenen Eigenschaften eines Graphen ermitteln

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst



Wie baut man eine Straßenbahnbrücke, zählt Käferpopulationen und sagt Wasserstände an der Nordseeküste voraus? Drei völlig unterschiedliche Probleme, doch ihre Lösung ist gleich: Man modelliert die Vorgänge mit Funktionen. In diesem Beitrag bestimmen Ihre Schülerinnen und Schüler anhand von lebensnahen Aufgaben mit den Werkzeugen der Analysis die Funktionsterme von ganzrationalen, gebrochen-rationalen und trigonometrischen Funktionen sowie Wurzel-, Logarithmus- und Exponentialfunktionen.



RAABE KLASSE SCHULE

# Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II



Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Ann[illegible] Wittnebel
Satz: [illegible]ser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © tunart/E+/Getty Images Plus (Freiheitsbrücke Budapest, Ungarn)
Illustrationen: Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Lektorat: M[illegible]a Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Daniela Link, Mönchengladbach

# Einen Funktionsterm zu gegebenen Eigenschaften eines Graphen ermitteln

## Oberstufe (grundlegend)

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst





## Die Schüler lernen:

einen Funktionsterm zu gegebenen Eigenschaften eines Graphen zu ermitteln. Nach einem kurzen Theorieteil erläutert der Beitrag das Thema mit Beispielen anhand von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen und trigonometrische Funktionen. Um das erworbene Wissen zu testen, ist am Schluss des Beitrags eine Klassenarbeit mit Bewertungsschlüssel angefügt.

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:
**Ab** = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

| Thema | Material | Methode |
|---|---|---|
| Theorie | M1 | Ab |
| Aufgaben | M2 | Ab |
| Klassenarbeit | M3 | Ab, LEK |

### Erklärung zu Differenzierungssymbolen

| | | |
|---|---|---|
| einfaches Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau |
| | Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben. | |

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Nullstellen, Tangenten, Polstellen, Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte, Wendepunkte und Grenzwerte von ganzrationalen, gebrochen-rationalen und trigonometrischen Funktionen sowie Wurzel-, Logarithmus- und Exponentialfunktionen.

**Medien:** GTR/CAS, GeoGebra

**Kompetenzen:** Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

# Hinweise

## Einsatzmöglichkeiten:

Der Beitrag ist entweder zum Selbststudium, als Hilfe zur Vorbereitung für eine Klassenarbeit oder als Grundlage für Sie, um sich in diesen Themenkomplex einzuarbeiten, gedacht.
Es werden alle relevanten Funktionstypen in zahlreichen Aufgaben behandelt, daher bietet der Beitrag einen guten Überblick über die Problematik „Funktionsterme bestimmen“.

Am besten setzen Sie ihn dann im Unterricht ein, wenn Ihre Klasse bereits mit den Themen Differenzieren, Monotonie und Extremwerte sowie Wendepunkte und Wendetangenten vertraut sind. Einige Aufgaben können Sie aber auch bereits am Anfang der Oberstufe lösen lassen, da sie lediglich das Wissen aus den vorherigen Jahrgangsstufen wiederholen. Dazu gehören die Aufgaben 5a, 7 und 8, die auch mit dem Differenzierungsicon für einfache Aufgaben (vgl. Überblick) gekennzeichnet sind.
Des Weiteren bieten sich die Aufgaben in **M 2** auch als Hausaufgabe oder zum selbstständigen Üben an, besonders dann, wenn Sie die Lösungen den Lernenden gleichzeitig mit den Aufgaben zur Verfügung stellen. Ebenso denkbar ist eine Partner- oder Gruppenarbeit, bei der Sie leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler[1] mit leistungsschwächeren in Gruppen einteilen.
Das Material **M 3** ist als Lernerfolgskontrolle gedacht, es kann aber auch als weiteres Arbeitsblatt zum Üben verwendet werden. Mit der Lernerfolgskontrolle testen sich die Lernenden selbst oder auch Sie Ihre Klasse mithilfe des Bewertungsschlüssels.

## Differenzierungsmöglichkeiten:

Geben Sie zur Differenzierung das Material **M 1** (Theorie) als Hilfe für leistungsschwächere Schüler zusätzlich zu den Aufgaben in **M 2** aus. Falls in Ihrer Klasse das Können und Wissen rund um das Thema Kurvendiskussion noch nicht gefestigt ist, wiederholen Sie nach Möglichkeit auch den Theorieteil vorher für alle Lernenden.
Neben jeder Aufgabe steht ein Differenzierungsicon, an dem Sie sich ebenfalls beim Einteilen der Aufgaben orientieren können.

1 Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

## M 1 Theorie

Sie müssen dem jeweiligen Aufgabentext entnehmen, welche Aussagen für die analytische Umsetzung relevant sind, um die beschriebene Funktion aufstellen zu können.

**Typische Beispiele sind:**

Der Graph besitzt…

- eine Nullstelle bei $x_0$ $\Leftrightarrow f(x_0)=0$
- den Punkt $P(x_0\,|\,y_0)$ $\Leftrightarrow y_0=f(x_0)$
- eine waagrechte Tangente bei $x_0$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=0$
- einen Hochpunkt $P(x_0\,|\,y_0)$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)<0$
- einen Tiefpunkt $P(x_0\,|\,y_0)$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)>0$
- einen Wendepunkt $P(x_0\,|\,y_0)$ $\Leftrightarrow f''(x_0)=0 \wedge f'''(x_0)\neq 0$
- einen Terrassenpunkt $P(x_0\,|\,y_0)$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)=0 \wedge f'''(x_0)\neq 0$
- eine Polstelle bei $x_0$ $\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{Z(x)}{N(x)} \wedge N(x_0)=0$
- senkrechtes Einmünden in die x-Achse des Graphen bei $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\pm\infty$

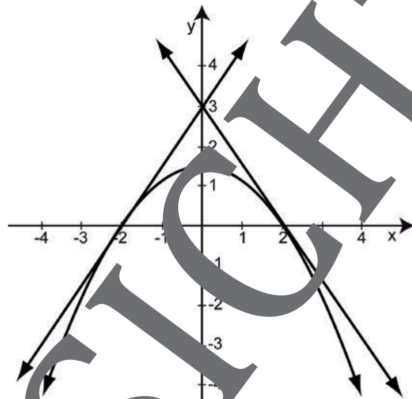
**Merken Sie sich:**

Bei einer Sinusfunktion der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x+c))+d$ verändern die Parameter a, b, c und d den Graphen der Sinusfunktion wie folgt:

- a staucht oder streckt den Graphen in y-Richtung, spiegelt ihn an seinem Mittelwert (gedachte Mittellinie) bei negativem Vorzeichen
- b staucht oder streckt den Graphen in x-Richtung und beeinflusst daher die Periode P, es gilt $P=\dfrac{2\pi}{|b|}$
- c verschiebt den Graphen in x-Richtung (negatives c nach rechts, positives nach links)
- d verschiebt den Graphen in y-Richtung (negatives d nach unten, positives nach oben)

# M 2 Aufgaben

1. Der gezeichnete Graph (eine Parabel) einer Funktion f hat Nullstellen bei $x = -2$ und $x = 2$. Die Tangenten an den Graphen in den Nullstellen schneiden sich auf der y-Achse im Punkt $(0 \mid 3)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f.




Ab[illegible] Vöst

2. Eine Parabel 3. Ordnung (d. h. der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades), hat seinen Tiefpunkt in $O(0 \mid 0)$ und in $W(2 \mid 3)$ einen Wendepunkt. Ermitteln Sie die zugehörige Funktion.

3. Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist zur y-Achse symmetrisch und hat in $P(2 \mid y_P)$ eine Wendetangente mit der Gleichung [illegible] $+ 3y - 8 = 0$. Ermitteln Sie die zugehörige Funktion.

4. Gesucht wird eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph folgende Bedingungen erfüllt: Extrempunkt $(0 \mid 0)$, Wendepunkt $W(2 \mid 3)$. Die Wendetangente ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x$.

5. Gesucht ist eine Funktion der Form $f:\ x \mapsto \dfrac{ax^2}{x+c}$ mit $a \neq 0$.

   a) Bestimmen Sie a und c so, dass der Graph $G_f$ bei $x = 1$ eine Polstelle hat und durch den Punkt P[illegible] geht. Skizzieren Sie anschließend $G_f$.

   b) Welche Eigenschaften hat der Punkt P?
   Warum wird diese Eigenschaft in Aufgabe a) nicht als Bedingung vorgegeben? Skizzieren Sie zur Erklärung die Graphen für verschiedene Werte von a.

6. Der gezeichnete Graph hat im Ursprung die Steigung $-\frac{3}{2}$. Die zugehörige Funktionsgleichung hat die Form $f(x) = ax \cdot \sqrt{b - x^2}$. Bestimmen Sie a und b.

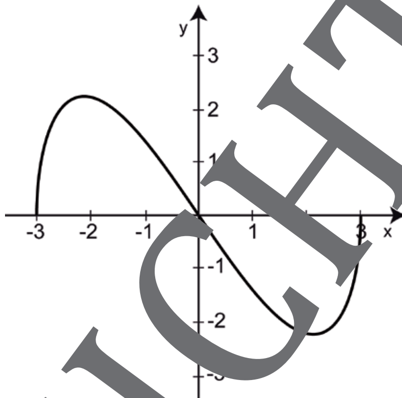



Abb. 2, Grafik: Carlo Vöst

7. Der Wasserstand h (in m) bei Neuharlingersiel an der Nordseeküste schwankt an einem Februartag zwischen etwa 0,6 m bei Niedrigwasser und etwa 3,4 m bei Hochwasser. Er lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t (in Std. nach Niedrigwasser) modellhaft beschreiben durch $h(t) = a$ [illegible] $\left(\frac{1}{6}\pi \cdot t - \frac{1}{2}\pi\right)$.

   a) Bestimmen Sie die Parameter a und b. Skizzieren Sie den Graphen von h.
   b) Berechnen Sie, wie lange der Wasserspiegel unter [illegible],3 m liegt. Wie viele Zentimeter je Minute steigt das Wasser maximal?

8. Das untenstehende Bild zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie aus dem Graphen jeweils mit kurzer Begründung (mögliche) Werte für a, b, c und d.

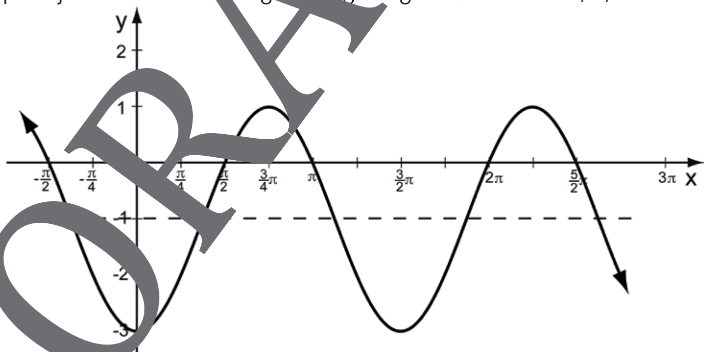



Abb. 3, Grafik: Carlo Vöst

9. Der Graph der Funktion $f:\ x \mapsto 2 \cdot \ln\left(a + bx^n\right)$ mit a, b >0 und $n \in \mathbb{N}$ soll achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse sein, durch den Ursprung gehen und an der Stelle x = 1 die Steigung 2 haben. Bestimmen Sie zunächst den kleinsten für n möglichen Wert, danach die Parameter a und b. Berechnen Sie f(3) und f(6) und zeichnen Sie den Graphen der gefundenen Funktion.

10. In einer Population von Käfern werden am ersten Tag (t = 0) genau 30 Käfer gezählt. Am nächsten Tag sind es bereits 36 Käfer. Es wird geschätzt, dass die Population auf maximal 450 Käfer anwachsen kann.
Das Wachstum soll durch die Funktion f, gegeben durch $f(t) = \frac{a \cdot b}{a + e^{b \cdot c \cdot t}}$; $c < 0$ (logistisches Wachstum), mit t in Tagen, modelliert werden.
   a) Bestimmen Sie f(t) (exakt und gerundet). Zeichnen Sie auch den Graphen des Wachstumsvorgangs.
   b) Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Population auf 90 % ihres Endbestandes angewachsen ist. Runden Sie dabei auf eine Dezimale genau.

11. Die Streckenführung einer innerstädtischen Straßenbahnlinie über eine Brücke soll geplant werden (siehe Abbildung). Die Strecke auf der Brücke soll 100 m lang werden und verläuft ebenso horizontal wie die Strecke auf dem Boden. Die Brücke liegt 10 m über dem Bodenniveau. Für die Rampe, welche den Übergang vom Boden auf die Brücke darstellt, hat der Architekt eine Rampenlänge von 400 m, horizontal gemessen, vorgeschlagen.

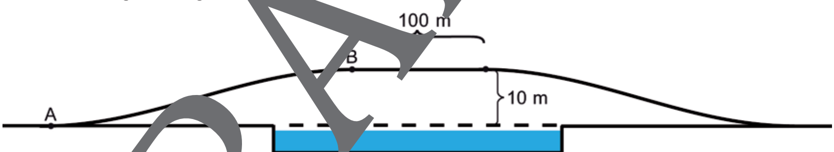



*Abb. 4, Grafik: C... Vöst*

Ein Experte begutachtet die Planung und weist darauf hin, dass Strecken für Straßenbahnen eine maximale Steigung von 2,5 % aufweisen dürfen, damit die Räder der Straßenbahn nicht durchdrehen.
   a) Begründen Sie, dass dieser maximale Steigungswert so nicht einzuhalten ist.

Die Rampenlänge wird deswegen verlängert, und zwar auf 800 m, horizontal gemessen.

b) Der Architekt schlägt nun vor, ein Koordinatensystem so einzuführen, dass die x-Achse in der horizontalen Ebene liegt und die y-Achse dazu senkrecht durch den Punkt A geht; damit haben die Punkte A und B die Koordinaten $A(0|0)$ und $B(800|10)$. Das Rampenprofil soll durch eine Kosinusfunktion f der Form $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$ modelliert werden. Berechnen Sie a, b und c.

c) Bestimmen Sie die maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der Problemstellung.

Der Experte hat immer noch Bedenken: Er denkt, dass der Übergang in den Punkten A und B in die Horizontale nicht gut genug ist.

d) Begründen Sie rechnerisch, dass der Experte Recht hat, weil die Kurve der Modellierung durch die Funktion f in den Punkten A und B gekrümmt ist, also der Übergang in die Horizontale nicht „glatt“ genug ist.

e) Schließlich schlägt der Architekt vor, eine ganzrationale Funktion g zu nehmen, um das Streckenprofil zu modellieren. Begründen Sie, dass man (mindestens) eine ganzrationale Funktion fünften Grades braucht, damit die Übergänge komplett „glatt“ sind und bestimmen Sie dann diese Funktion g.

**Hinweis:** Teilen Sie sämtliche x-Werte durch 800, damit die Rechnung nicht zu kompliziert wird. Dann haben die Punkte A und B die Koordinaten: $A(0|0)$ und $B(1|10)$.

f) Untersuchen Sie rechnerisch, ob der maximale Steigungswert von 2,5 % (siehe oben) aufgrund der Modellierung durch die Funktion g eingehalten wird.

**Niveau der einzelnen Aufgaben von M 2**

| **Aufg.-Nr.** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5a** | **5b** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Niveau** | ● | ■ | ■ | ▲ | ● | ▲ |
| **Aufg.-Nr.** | [illegible] | [illegible] | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **Niveau** | ■ | ● | ● | ● | ■ | ▲ ● ■ |
| | [illegible] | 11b | 11c | 11d | 11e | 11f |
| | ■ | ● | ■ | ■ | ▲ | ■ |

# M 3 Klassenarbeit

1. Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Punkt W auf der y-Achse die Gerade w mit der Gleichung $y + x + 1 = 0$ als Wendetangente und bei $x = -2$ einen Terrassenpunkt. Bestimmen Sie den Funktionsterm. **(12 BE)**

2. Gesucht ist eine gebrochen-rationale Funktion f der Form $f:\ x \mapsto \frac{ax}{bx + c} + d \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, mit folgenden Eigenschaften: die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{3}{2}$ ist senkrechte Asymptote des Graphen, die Nullstelle ist $x = 1$, der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S(0 \mid 3)$. **(8 BE)**

3. Gesucht ist eine Exponentialfunktion f der Form $f(x) = e^{ax-bx^2}$ $(a,b \neq 0)$, deren Graph einen Hochpunkt $H(2 \mid y_H)$ sowie einen Wendepunkt $W(3 \mid y_W)$ besitzt.
   a) Stellen Sie die entsprechende Funktionsgleichung auf. **(14 BE)**
   b) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Form $f(x) = e^{ax-bx^2}$ folgende Eigenschaften haben: Sie verlaufen durch den Punkt $A(0 \mid 1)$ mit der Steigung a, **(2 BE)**
   c) sie sind achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \frac{a}{2b}$ **(4 BE)**

4. Ein Körper schwingt (harmonisch) an einer Schraubenfeder hängend um die Gleichgewichtslage (siehe Abbildung) gemäß der Funktion $y(t) = a \cdot \sin(b \cdot (t + c)) + d$ [y: Entfernung vom unteren Umkehrpunkt in cm; t: Zeit in s]. Die Zeitrechnung beginnt $(t = 0\ s)$, wenn sich der Körper genau zwischen der Gleichgewichtslage und dem unteren Umkehrpunkt befindet und sich nach unten bewegt. Bestimmen Sie die Parameter a, b, c und d in der obigen Funktionsgleichung für eine Schwingung, deren Amplitude 3 cm beträgt und deren Schwingungsdauer 8 s ist. **(8 BE)**

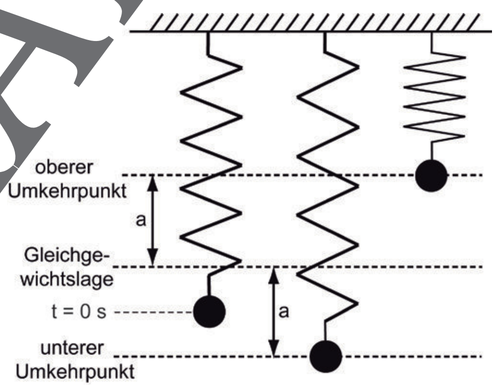


*Abb. 5, Grafik: Carlo Vöst*

Zeichnen Sie für $t \in [0\,s\,;12\,s]$ den Graphen von y(t) in ein beschriftetes KoS. **(6 BE)**

**Zeitbedarf: [illegible]0 min.** **Gesamt: 54 BE**