

Rotationskörper – Abituraufgaben

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau

Illustrationen von Dr. Wilfried Zappe



© FreshSplash/E+/Getty Images Plus

Rotationssymmetrische Röhrenkörper bieten ein dankbares Umfeld für Mathematikaufgaben – damals wie heute. In einem Beitrag reisen Ihre Schülerinnen und Schüler gedanklich zurück ins Jahr 1968 und bearbeiten eine Abituraufgabe aus dieser Zeit. Wie einst üblich lösen die Lernenden die Aufgabe ohne digitale Hilfsmittel. Diese scheinbar „alte“ Aufgabe wird anschließend durch eine ähnliche Aufgabenstellung ergänzt, die aber mehr den heutigen Ansprüchen hinsichtlich der Kompetenzentwicklung und der Verwendung digitaler Hilfsmittel entspricht.

Rotationskörper – Abituraufgaben

Oberstufe (erhöhtes Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau

Illustrationen von Dr. Wilfried Zappe

Hinweise	1
M 1 Eine Abituraufgabe aus dem Jahre 1968	3
M 2 Variation der alten Abituraufgabe	4
M 3 Lernerfolgskontrolle	6
Lösungen	7

Die Schüler lernen:

- die Gleichung der Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion zu ermitteln,
- das Volumen von Rotationskörpern bei der Rotation um die x-Achse durch Überschlag abzuschätzen und mithilfe der Integralrechnung zu berechnen,
- den kürzesten Abstand eines Punktes zum Graphen einer Funktion zu bestimmen.

Hinweise

In **M 1** sollen die Lernenden zunächst die alte Aufgabe, die aus dem DDR Abitur von 1968 stammt, eingehend studieren und bearbeiten.

Der Aufgabentext der 68er-Aufgabe ist kurz und prägnant und enthält einen Praxisbezug. Wesentliche Kenntnisse und Fertigkeiten, die im damaligen Mathematikunterricht vermittelt wurden, wurden zur Lösung der Aufgabe benötigt. Da in den 60er-Jahren des vorigen Jahrhunderts die Kegelschnitte noch Lehrplangegenstand waren, war der Begriff „Rotationsparaboloid“, die zugehörige Volumenformel sowie deren Herleitung Gegenstand des Unterrichts. Auch die darstellende Geometrie und z. B. das technische Zeichnen spielten eine größere Rolle als heute, sodass das Erstellen der Zeichnung keine große Herausforderung für die Jugendlichen darstellte. Da es meistens keine digitalen Mathematikwerkzeuge für den Schulunterricht gab, waren allerdings die Möglichkeiten z. B. zum Lösen von Gleichungen beschränkter als heute. Daher sollten die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe möglichst hilfsmittelfrei lösen.

Lehrplanbezug

Welche Anforderungen werden heute u. a. an derartige Abituraufgaben gestellt?

Der Begriff „Rotationsparaboloid“ steht heute meistens nicht mehr explizit in den Mathematiklehrplänen des Gymnasiums. Trotzdem kommt der Untersuchung von Rotationskörpern aber auch heute noch eine größere Bedeutung zu. So heißt es in den Bildungsstandards für den Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife in der Leitidee „Messen“ für das erhöhte Anforderungsniveau u. a.:

„Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus ... das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.“

Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012), Seite 19

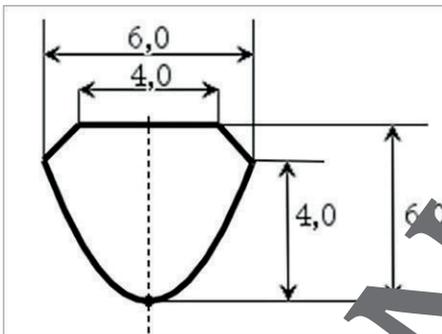
Genau wie schon vor mehr als 50 Jahren ist ein Praxisbezug stets wünschenswert. Die Aufgabenstellungen sind so formuliert, dass möglichst mehrere mathematische Kompetenzen angesprochen werden. Angesichts der Verfügbarkeit digitaler Mathematikwerkzeuge können auch Anforderungen auftauchen, die ohne diese Hilfsmittel nicht oder nur schwer zu bewältigen wären. Andererseits erfüllen die Aufgaben auch den Anspruch, dass ein hinreichend tiefes mathematisches Verständnis zur Lösung nötig ist. Die umfangreichere Aufgabenstellung in **M 2** versucht diesen Anforderungen gerecht zu werden.

VORANSICHT

M 1 Eine Abituraufgabe aus dem Jahre 1968

Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe, ohne digitale Rechenhilfsmittel bei der Lösung zu verwenden.

-  Die Skizze stellt den Achsenschnitt der Trommel eines Rührwerks dar. Sie besteht aus einem Rotationsparaboloid mit aufgesetztem Kegelsumpf (Innenmaße siehe Skizze).



Grafik: Dr. W. Zappe

Skizze (nicht maßstäblich), (Maßangaben in dm)

Berechnen Sie das Volumen der Trommel in Liter!

-  **Hinweis:** Wird die Formel für das Volumen eines Rotationsparaboloids benutzt, so ist dies mithilfe der Integralrechnung herzuleiten.

Quelle:

https://mathematik.uni.de/wp-content/uploads/2020/09/DDR_Abitur_Aufgaben.pdf

(aufgerufen am 31.05.2021)

M 2 Variation der alten Abituraufgabe

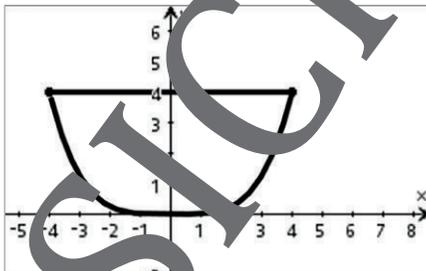
			
1, 2	3	4	5, 6

Die nebenstehende Zeichnung zeigt den maßstäblichen Achsenschnitt des Modells der rotationssymmetrischen Rührschüssel einer Küchenmaschine (siehe Titelfoto). Es wird angenommen, dass die innere Berandung der Schüssel im Achsenschnitt modellhaft durch den Graphen einer Potenzfunktion

$$y = f(x) = a \cdot x^4 \text{ mit } -4 \leq x \leq 4$$

beschrieben wird.

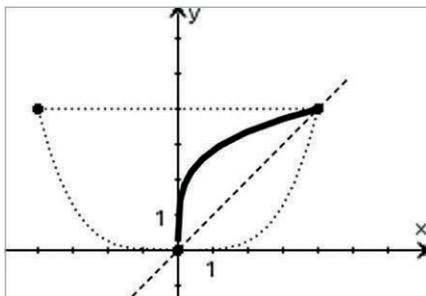
(Eine Längeneinheit in der Zeichnung entspricht 4,7 cm in der Realität.)



Grafik: Dr. W. Zappe

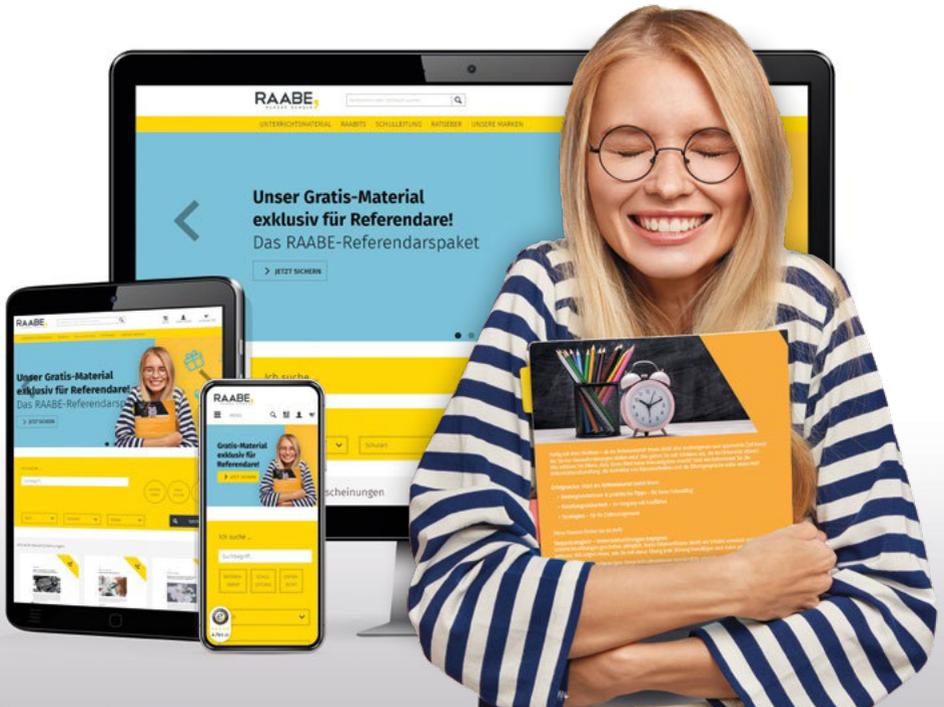
1. Ermitteln Sie durch einen handschriftlichen Überschlagn einen Näherungswert für das Volumen der Schüssel (in Liter). Beschreiben Sie Ihre diesbezüglichen Überlegungen.
2. Begründen Sie anhand der Zeichnung, dass der Parameter a in der Gleichung $y = f(x) = a \cdot x^4$ den Wert $a = \frac{1}{4}$ besitzt.

3. Zur Ermittlung eines genaueren Wertes für das Volumen kann die Umkehrfunktion von f im Intervall $0 \leq x \leq 4$ verwendet werden. Zeichnen Sie eine Gleichung dieser Umkehrfunktion her. (Der Graph der Umkehrfunktion ist in der Abbildung fett gezeichnet.)



Grafik: Dr. W. Zappe

Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



- ✓ **Über 4.000 Unterrichtseinheiten** sofort zum Download verfügbar
- ✓ **Sichere Zahlung** per Rechnung, PayPal & Kreditkarte
- ✓ **Exklusive Vorteile für Grundwerks-Abonent*innen**
 - 20% Rabatt auf Unterrichtsmaterial für Ihr bereits abonniertes Fach
 - 10% Rabatt auf weitere Grundwerke

Jetzt entdecken:
www.raabe.de