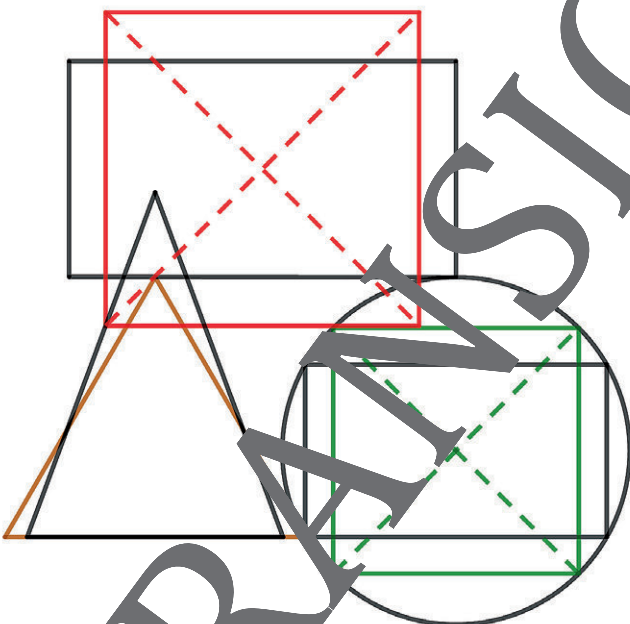
Extremale Aussagen

Wolfgang Lübbe, Rostock
Illustrationen von Wolfgang Lübbe



Grafik: Wolfgang Lübbe

Dieser Beitrag motiviert Ihre Schülerinnen und Schüler und fordert sie auf, sich mit der Beweisführung in der Mathematik anhand extremaler Aussagen zu beschäftigen und diese an entsprechenden Beispielen zu überprüfen. Dazu verwenden sie Zusammenhänge aus der Geometrie der Ebene (Rechteck – Quadrat; gleichschenkliges Dreieck – gleichseitiges Dreieck) und des Raumes (Quader – Würfel, Pyramide – Tetraeder). Die Beweise führen die Jugendlichen dabei in den klassischen Schritten: Voraussetzung, Behauptung, Beweis.

RAABE, KLASSE SCHULE

Extremale Aussagen

Oberstufe (weiterführend)

Wolfgang Lübbe, Rostock
Illustrationen von Wolfgang Lübbe

Die Schüler lernen:

Die Schülerinnen und Schüler vervollkommnen durch die Lösung der hier gestellten Aufgaben ihr Wissen und Können im Rahmen mathematischer Beweise. Ihnen wird anschaulich vor Augen geführt, dass sehr viele Beispiele, mögen sie einen mathematischen Zusammenhang auch noch so nahelegen, im Sinne der Mathematik keinen Beweis darstellen. Den Lernenden wird dabei (sicher zum wiederholten Male) bewusst gemacht, dass Beweise in der Mathematik allgemeingültig geführt werden müssen, d. h. auf der Basis von Variablen.
Die Beweisführung muss dabei in drei Schritten erfolgen:

- Festlegen der Voraussetzungen
- Formulieren der Behauptung
- Beweis der Behauptung unter Verwendung der Voraussetzungen

Abschließend können die Richtigkeit der gefundenen Zusammenhänge und Abhängigkeiten jeweils anhand eines entsprechenden konkreten Beispiels überprüft werden. Ziel der Bearbeitung dieser Aufgaben ist die Weiterentwicklung des mathematisch-logischen Denkvermögens der Lernenden.

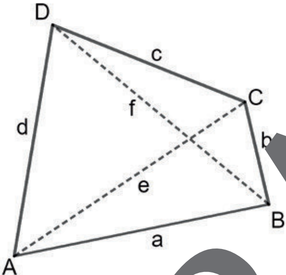
M 1 Extremale Aussagen – Theorie

Theorie: Konvexes Viereck

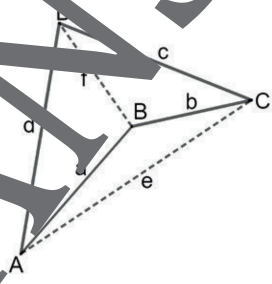
Durch vier voneinander verschiedene Punkte einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, können genau sechs Geraden gezeichnet werden, die jeweils zwei Punkte miteinander verbinden. Die vier Punkte sind Eckpunkte des Vierecks. Für sie wird ein bestimmter Umlaufsinn (mathematisch positiver Drehsinn, d. h. entgegen Uhrzeigerrichtung) festgelegt. Die Verbindungsstrecken aufeinanderfolgender Punkte sind die Seiten, die Verbindungsstrecken nicht aufeinanderfolgender Punkte die Diagonalen des Vierecks. Liegen die Diagonalen vollständig im Inneren des Vierecks, so heißt es ein *konvexes* Viereck, im anderen Fall ein *konkaves* Viereck.

Beispiele für konvexe Vierecke: Quadrat, Rechteck, Rhombus (Raute), Rhomboid (Parallelogramm), Drachenviereck, Trapez, Trape…

Konvexes Viereck:

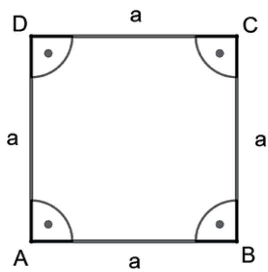


Konkaves Viereck:



Regelmäßige konvexe n-Ecke haben n gleich lange Seiten und n gleich große Innenwinkel. Jedem regelmäßigen konvexen n-Eck kann ein Kreis einbeschrieben werden, für den die Seiten des n-Ecks Tangenten sind. Ihm kann ein Kreis umbeschrieben werden, in dem die Seiten des n-Ecks Sehnen sind.

Beispiele für regelmäßige konvexe n-Ecke: regelmäßiges Sechseck, regelmäßiges (gleichseitiges) Dreieck, regelmäßiges Viereck (Quadrat).



Grafiken: Wolfgang Lübbe, Rostock

Merke:

Für **regelmäßige konvexe n-Ecke** gelten in der Mathematik eine Reihe extremaler Aussagen.

Einige Beispiele:

Allgemeine Aussage	Beispiele
Von allen n-Ecken mit gleichem Umfang hat das regelmäßige den größten Flächeninhalt.	Von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt. Von allen Dreiecken mit gleichem Umfang hat das gleichseitige Dreieck den größten Flächeninhalt.
Von allen n-Ecken mit gleichem Flächeninhalt hat das regelmäßige den kleinsten Umfang.	Von allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang. Von allen Dreiecken mit gleichem Flächeninhalt hat das gleichseitige Dreieck den kleinsten Umfang.
Von allen n-Ecken, die einem Kreis einbeschrieben werden können, hat das regelmäßige den größten Flächeninhalt.	Von allen Rechtecken, die einem Kreis einbeschrieben werden können, hat das Quadrat den größten Flächeninhalt. Von allen Dreiecken, die einem Kreis einbeschrieben werden können, hat das gleichseitige Dreieck den größten Flächeninhalt.
Von allen n-Ecken, die einem Kreis einbeschrieben werden können, hat das regelmäßige den größten Umfang.	Von allen Rechtecken, die einem Kreis einbeschrieben werden können, hat das Quadrat den größten Umfang. Von allen Dreiecken, die einem Kreis einbeschrieben werden können, hat das gleichseitige Dreieck den größten Umfang.