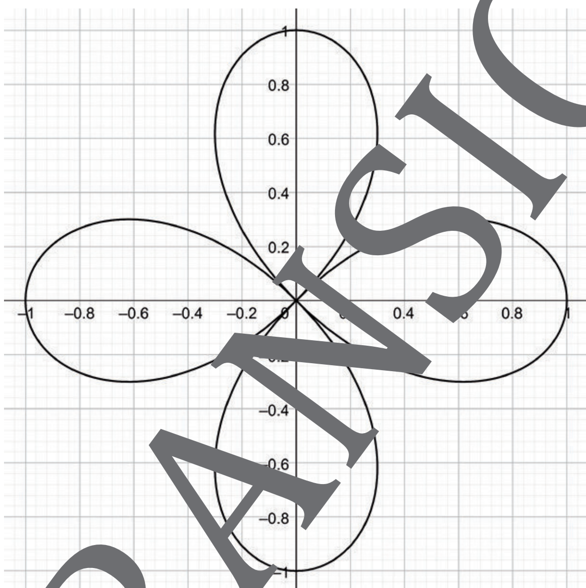
Extremwertprobleme und Flächenberechnungen bei einer Wurzelfunktionenschar

Günther Weber



© Günther Weber

Funktionsuntersuchungen mit der Bestimmung gewisser Eigenschaften des Graphen einer Funktion gehören zu den Standardaufgaben des Analysisunterrichts der Oberstufe. Dies lässt sich um Extremalwertaufgaben erweitern, indem zwischen zwei Graphen Dreiecke, Rechtecke oder Trapeze eingefügt werden, deren Flächeninhalt maximal wird. Ebenso können Graphen den Umriss eines Rotationskörpers bilden, in dem ein Körper wie z. B. ein Kegel mit maximalem Volumen einbeschrieben wird.
Da der Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse mit einem GTR/CAS nur approximiert ausgegeben werden kann, werden zur Näherung das Sehnentrapezverfahren und das Simpson-Verfahren vorgestellt.

Extremwertprobleme und Flächenberechnungen bei einer Wurzelfunktionenschar

Oberstufe (weiterführendes Niveau)

Günther Weber

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Mithilfe der Eigenschaften zweier Graphen einer Wurzelfunktionenschar werden die zugehörigen Parameter bestimmt. Ebenso soll gezeigt werden, dass die Funktionenschar die vorgegebene Ableitung besitzt, und die Ortslinie der Extrempunkte soll bestimmt werden. Bei der Funktion f_1 der Schar wird der Definitionsbereich eingeschränkt und der Graph der Funktion gespiegelt. Zwischen dem Graphen der Funktion f_1, dem an der y-Achse gespiegelten Graphen sowie einer Parallelen zur y-Achse kann ein Dreieck, ein Rechteck oder ein Trapez eingefügt werden, dessen Flächeninhalt maximal sein soll. Zu bestimmen ist jeweils die zur Parallelen gehörige Gleichung. Rotiert der Graph einer Funktion der Wurzelfunktionenschar, so entsteht ein Rotationskörper, an dem Volumenberechnungen durchgeführt werden sollen. Spiegelt man den Graphen einer Funktion f_1 der Schar an unterschiedlichen Geraden, so erhält man eine Abbildung, die einem „Kleeblatt" ähnelt. Da die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse mit dem GTR/CAS nur näherungsweise ausgegeben wird, lernen die Schülerinnen und Schüler zwei Näherungsverfahren – das Sehnentrapezverfahren und das Simpson-Verfahren – kennen und bestimmen den Flächeninhalt mithilfe dieser beiden Verfahren.

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler können Eigenschaften von Graphen zum Bestimmen von Parametern nutzen. Eine Funktionsuntersuchung, auch bei einer Funktionenschar, bereitet ihnen keine Schwierigkeit. Die Lernenden kennen die Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreieck, Rechteck oder Trapez bzw. des Volumens eines Kegels und können diese zum Aufstellen der Zielfunktion bei einem Extremwertproblem nutzen. Die Jugendlichen können eine Geradenspiegelung auf den Graph einer Funktion durchführen und den zugehörigen Funktionsterm ermitteln. Sie können das Volumen von Rotationskörpern berechnen und sie können die Tangentengleichung in einem Punkt des Graphen bestimmen.

Im Allgemeinen sollten die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit Wurzelfunktionen sein und diese sowohl integrieren als auch differenzieren können. Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden sicher im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner, einer Tabellenkalkulation und Geogebra sind.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan
https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf
finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler …

- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“),
- wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an,

- nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$,
- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Bei Aufgabe 1 können vor der Bearbeitung Eigenschaften von Graphen im Unterrichtsgespräch gesammelt werden, sodass eine Bestimmung der Parameter möglich ist. Bei Aufgabe 2 kann vor der Bearbeitung noch einmal auf den Definitionsbereich einer Wurzelfunktion eingegangen werden. Ebenso kann noch einmal herausgestellt werden, dass bei der Bestimmung des Definitionsbereichs eine Fallunterscheidung notwendig ist. Aufgabe 3 kann durch Geogebra veranschaulicht werden und die Lösungen können experimentell mithilfe eines Schiebereglers näherungsweise gelöst werden. Bei Aufgabe 5a sollte das Informationsblatt zur numerischen Integration erst nach der Beschreibung des Verfahrens anhand der Abbildung ausgeteilt werden. Ebenso kann hier auch noch einmal die Annäherung der Fläche durch Rechtecke (Unter-bzw. Obersumme) wiederholt werden; eine Veranschaulichung kann mithilfe von Geogebra durch die Befehle „untersumme()“ bzw. „obersumme()“ erfolgen. Aus Zeitgründen kann dabei der Aufbau der Tabellenkalkulation vorgegeben werden. Aufgabe 6 kann ebenfalls mit Geogebra veranschaulicht werden.

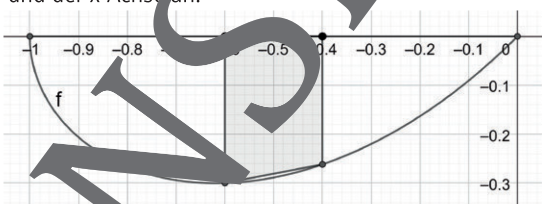
Informationsblatt Numerische Integration M1

Gegeben ist eine stetige Funktion f, deren Funktionswerte im betrachteten Intervall [a;b] keinen Vorzeichenwechsel aufweisen.

Annäherung der Fläche durch Trapeze (Sehnentrapezregel)

Das betrachtete Intervall [a;b] wird in n Teilintervalle zerlegt. In jedem Teilintervall lässt sich die Fläche zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse durch ein Trapez annähern. Bei einer Aufteilung des Intervalls in n gleich große Teilintervalle beträgt die Höhe eines Trapezes $h = \frac{b-a}{n}$ LE. Die Länge der Grundseiten des Trapezes entspricht dem Betrag der Funktionswerte an den Rändern des Teilintervalls. Ein Aufsummieren der Flächeninhalte der Trapezflächen über alle Teilintervalle nähert den Flächeninhalt zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse an.

Im Beispiel ist die Annäherung der Fläche zwischen dem Graph der Funktion f im Teilintervall [-0,6;-0,4] durch ein Trapez dargestellt.



Annäherung der Fläche durch Parabeln (Simpson-Regel)

Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse wird durch Teilflächen unter Parabelbögen angenähert. Für ein Teilintervall $[x_0;x_1]$ wird die Parabel hierbei durch folgende Punkte gelegt:

$$P_0(x_0 \mid f(x_0)),\ P_1(x_1 \mid f(x_1)) \text{ und } P_m(x_m \mid f(x_m)) = \left(\frac{x_0+x_1}{2} \mid f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\right).$$

Bei der Berechnung wird der Funktionswert in der Mitte des Intervalls zudem noch mit dem Faktor 4 gewichtet.

Für das Teilintervall $[x_0;x_1]$ gilt: $A = \frac{x_1-x_0}{6} \cdot \left| f(x_0) + 4 \cdot f\left(\frac{x_1+x_0}{2}\right) + f(x_1) \right|$

Im Beispiel ist die Annäherung der Fläche zwischen dem Graph der Funktion f im Teilintervall [-0,8;-0,6] durch eine Parabel dargestellt.