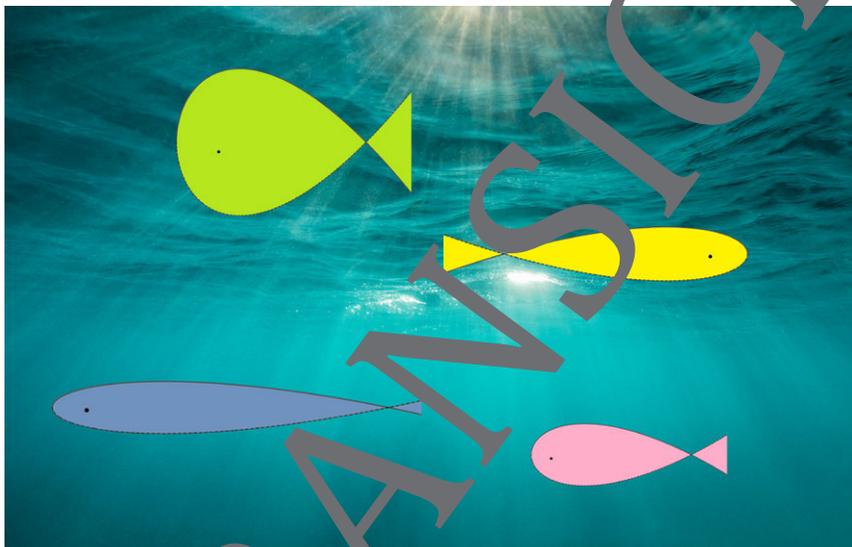


# Graphen verschieben, strecken und spiegeln – Mathematische Fische

Ein Beitrag von Dr. Wilfried Zappe



verändert nach: © Digne Keshch / Moment Getty Images Plus

Am Anfang steht eine klassische Anwendungsdiskussion. Sie führt auf einen Graphen, den man als Silhouette eines Fisches interpretieren kann. Aus dieser Grundidee entstand die Anregung zur Variierung von Funktionsgleichungen, um durch Verschieben, Spiegeln und Strecken aus einer „Urform“ ganze „Fischschwärme“ modellhaft grafisch darzustellen. Dabei bearbeiten die Lernenden verschiedene Funktionsklassen. Einiges können die Jugendlichen hilfsmittelfrei realisieren, für andere Funktionen ist die Verwendung eines grafikfähigen CAS-Rechners hilfreich. Als Lernerfolgskontrolle bietet der Beitrag ein Arbeitsblatt an, bei dem die Schülerinnen und Schüler ebenfalls einige Aufgaben ohne digitale Hilfsmittel und andere mit solchen Rechnern lösen sollen.

# Graphen verschieben, strecken und spiegeln – Mathematische Fische

## Oberstufe (weiterführend/vertiefend)

Ein Beitrag von Dr. Wilfried Zappe

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M1 Eine klassische Kurvendiskussion</b>	<b>3</b>
<b>M2 Wirkung von Parametern auf Graphen untersuchen</b>	<b>4</b>
<b>M3 Übersicht zum Einfluss von Parametern bei Funktionsgraphen</b>	<b>6</b>
<b>M4 Graphen durch Variieren von Parametern erzeugen</b>	<b>7</b>
<b>M5 Vertiefungen</b>	<b>8</b>
<b>M6 Lernerfolgskontrolle</b>	<b>9</b>
<b>Lösungen</b>	<b>11</b>

### Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Bedeutung von Parametern in Funktionsgleichungen für die grafische Darstellung von Funktionen kennen bzw. reaktivieren diese Kenntnisse. Sie nutzen dieses Wissen für einfache Modellierungen und die analytische Untersuchung von Funktionen.

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

**AB** Arbeitsblatt

**BA** Bildanalyse

**LEK** Lernerfolgskontrolle

**FS** Formelsammlung



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau



Einzelarbeit



Gruppenarbeit

Legende der Abkürzungen:

**AB** Arbeitsblatt

**BA** Bildanalyse

**LEK** Lernerfolgskontrolle

**FS** Formelsammlung

Thema	Material	Methode
Eine klassische Kurvendiskussion	M1	AB
Wirkung von Parametern auf Graphen untersuchen	M2	AB, BA
Übersicht zum Einfluss von Parametern bei Funktionsgraphen	M3	AB, FS
Graphen durch Variieren von Parametern erzeugen	M4	AB
Vertiefungen	M5	AB, BA
Lernerfolgskontrolle	M6	LEK, AB

## Kompetenzprofil

**Inhalt:** Funktionsgraph, Definitionsbereich, Streckung/Stauchung, Verschiebung, Spiegelung, Nullstelle, Extrem- und Wendepunkt

**Medien:** CAI-Taschenrechner

**Kompetenz:** Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen einfache Funktionen wie die Betragsfunktion, quadratische Funktion, Potenz- und Wurzelfunktion, Exponentialfunktion sowie Verknüpfungen und Verkettungen solcher Funktionen. Sie können Funktionen grafisch darstellen, ableiten und integrieren. Mit der Anwendung von CAS-Rechnern zur grafischen Darstellung und Untersuchung von Funktionen sind sie vertraut.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP\\_G02\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_G02_Mathematik.pdf)

(aufgerufen am 11.05.2022)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor,
- variieren Fragestellungen auf dem Basisstrang einer Lösung,
- verwenden ... digitale Hilfsmittel zur ... zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen,
- wenden einfache Transformationen ... auf Funktionen ... an und deuten die zugehörigen Parameter,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

### Methodische Überlegungen:

Eine Kurvendiskussion legt zu weitergehenden Aufgabenstellungen an, führt zum Nachdenken über mathematische Probleme, die auch mit heute verfügbaren Hilfsmitteln zu Aufgabenvarianten einladen.

Die Aufgabe in **M1** schafft die Grundlage für weitergehende Betrachtungen, die dazu führen, diesen Graphen durch Verschiebungen oder Spiegelungen in andere Lagen zu bringen oder seine Gestalt durch Streckungen etwas zu verändern. **M1** können Sie z. B.

als vorbereitende Hausaufgabe aufgeben. Vorausgesetzt, Ihre Klasse hat Kenntnisse über die Differentialrechnung.

Die Lernenden müssen sich im Weiteren Kenntnisse über die Wirkung von Parametern auf den Graphen der Funktion aneignen bzw. diese reaktivieren (**M2**). Die verschiedenen Arten von Parametern bieten es an, die Aufgaben in **M2** in Gruppenarbeit zu untersuchen und die Ergebnisse anschließend zusammenzuführen. Dabei wird direkter Bezug genommen auf Ergebnisse, die in **M1** erreicht wurden. Die Anwendung von CAS-Rechnern mit dem Einsatz von Schiebereglern bei der grafischen Darstellung von Funktionen wird empfohlen.

**M3** dient der Systematisierung und Zusammenfassung der Kenntnisse aus **M2** über den Einfluss von Parameter auf Funktionsgraphen.

In **M4** wenden die Jugendlichen ihr Wissen selbstständig an. Hier liefert eine Betragsfunktion eine Vorlage, mit der die Schüler auch ohne digitale Hilfsmittel zurechtkommen.

Eine Vertiefung wird in **M5** dadurch gegeben, dass die Funktion  $f_1$ , aus der weitere Funktionen durch Verschiebungen, Spiegelungen und Streckungen gewonnen werden sollen, nicht wie bisher direkt an der x-Achse liegt. Hier ist der Einsatz eines grafikfähigen digitalen Hilfsmittels sehr sinnvoll, weil die Lernenden direkt eine Rückmeldung über die Korrektheit der Lösung erhalten.

Mit **M6** bietet der Beitrag einen Vorschlag für eine Lernerfolgskontrolle..

## M2 Wirkung von Parametern auf Graphen untersuchen



Bereits in der Zeichnung der Graphen in M1 wurde der Graph von

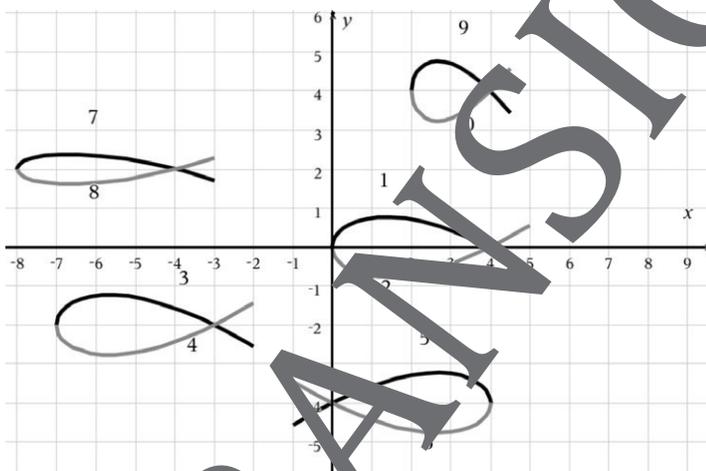
$y = -f(x)$  durch eine Spiegelung des Graphen von



$y = f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x} \cdot (4 - x)$  mit  $0 \leq x \leq 5$  an der x-Achse erzeugt.

Die in **M1** gezeichnete Figur erinnert an einen symbolischen Fisch (Graph Nr. 1 und Nr. 2).

Durch geeignete Spiegelungen, Verschiebungen und Streckungen lässt sich so ein ganzer „Fischschwarm“ aus einer einzigen Funktion erzeugen.



Grafik: Dr. Wilfried Zappe

### Beispiel:

Der Graph 1 entspricht dem Graph von  $f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x} \cdot (4 - x)$  mit  $0 \leq x \leq 5$ .

Der Graph 7 hat die Gleichung  $f_7(x) = \frac{1}{2} \cdot f_1(x + 8) + 2$  mit  $-8 \leq x \leq -3$ .

Er entsteht durch folgende Abbildungen aus dem Graphen 1:

- Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$ .
- Verschiebung um acht Einheiten in negative x-Richtung
- Verschiebung um zwei Einheiten in positive y-Richtung

# Sie wollen mehr für Ihr Fach?

## Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 5.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Webinare und Videos**  
für Ihre fachliche und  
persönliche Weiterbildung



**Attraktive Vergünstigungen**  
für Referendar:innen mit  
bis zu 15% Rabatt



**Käuferschutz**  
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**