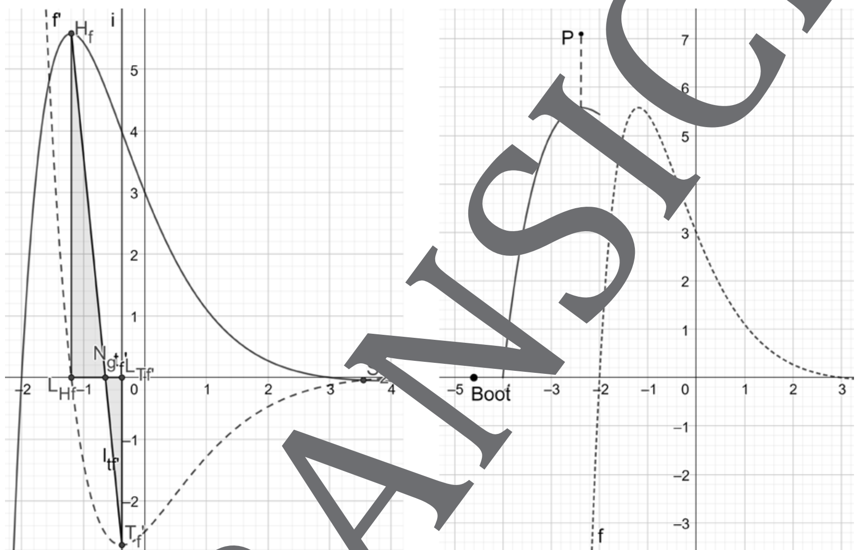
# Untersuchung einer Exponentialfunktion – Eigenschaften und Anwendungsprobleme

Ein Beitrag von Günther Weber




*© Günther Weber*

Funktionsuntersuchungen mit Eigenschaftsbestimmungen gehören zu den Standardaufgaben des Analysis-Unterrichts der Oberstufe. Ebenso können Figuren zwischen den Graphen der Funktion und der x-Achse gelegt werden, sodass der Flächeninhalt maximal wird. Die Funktionsuntersuchung erweitert der Beitrag damit um Extremalwertaufgaben. Nimmt man zum Graph einer Funktion noch den Graphen der Ableitungsfunktion hinzu, so kann man nicht nur Flächenberechnungen zwischen dem Graphen der Ausgangsfunktion und der x-Achse, sondern auch zwischen den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion durchführen. Der Graph der Exponentialfunktion bildet bei einer weiteren Aufgabe den Querschnitt eines Körpers, bei dem die Jugendlichen bestimmte Größen berechnen. Ebenso bildet der in Richtung der x-Achse gestreckte Graph den Querschnitt einer Steilküste. Anwendungsaufgaben stellen bestimmte Anforderungen an diese Steilküste, welche die Lernenden lösen.

RAABE, KLASSE SCHULE

# Untersuchung einer Exponentialfunktion – Eigenschaften und Anwendungsprobleme

## Oberstufe (grundlegendes/weiterführendes Niveau)

Günther Weber



## Die Schüler und Schülerinnen lernen:

die Untersuchung des Graphen einer Funktion auf bestimmte Eigenschaften. Sie bestimmen die Gleichung der Wendetangente und den Berührpunkt einer Parallelen zur Wendetangente mit dem Graphen sowie den Flächeninhalt zwischen Graphen und der x-Achse. Zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse lassen sich Dreiecke oder Rechtecke legen. Die Jugendlichen bestimmen die Lage dieser Dreiecke so, dass die Flächeninhalte maximal werden. Durch Ableitung einer Exponentialfunktion oder Spiegelung bzw. Verschiebung ihres Graphen erzeugen sie weitere Graphen. Die Lernenden legen zwischen die Graphen ein Dreieck, welches abhängig von einer Parallelen zur y-Achse rechtwinklig oder gleichschenklig sein kann. Ebenso legen die Jugendlichen durch eine Parallele ein Dreieck, ein Rechteck oder ein Trapez fest, dessen Flächeninhalt maximal sein soll. Sie stellen dazu jeweils eine Parallelengleichung auf.
Rotiert der Graph der Exponentialfunktion, so entsteht ein Rotationskörper, an dem die Lernenden Volumenberechnungen durchführen. Streckt man den Graphen der Exponentialfunktion in Richtung der x-Achse und schränkt den Definitionsbereich ein, so entsteht ein Querschnitt mit dem Aussehen einer Steilküste. Diesen Querschnitt nutzen die Schülerinnen und Schüler als Modellierung und beantworten mit dem Querschnitt die gestellten Aufgaben.

## Überblick

Legende der Abkürzungen:

**AB** Arbeitsblatt

einfaches Niveau — mittleres Niveau — schwieriges Niveau

Zusatzaufgaben — Verwendung GTR/CAS

| Thema | Material | Methode |
|---|---|---|
| Aufgaben | M1 | AB |

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Exponentialfunktion, Null- und Schnittstellen, Extrem- und Wendepunkte, Lösen von Extremwertproblemen, Stammfunktion, Tangente und Berührpunkt, Flächenberechnungen bei Flächen zwischen dem Graph einer Funktion und der x-Achse bzw. zwischen zwei Graphen, Volumen Rotationskörper, Streckung in Richtung der x-Achse, Bogenlänge eines Graphen, Umwandlung von Einheiten

**Medien:** GTR/CAS, GeoGebra

**Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler können eine Funktionsuntersuchung durchführen und bestimmen ohne Probleme Tangentengleichungen in einem Punkt des Graphen. Günstig ist es, wenn sie auch die Tangentengleichung aufstellen können, wenn der Punkt nicht auf dem Graphen liegt.

Ebenso können sie den Wert von Integralen berechnen. Sie kennen die Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreieck und Rechteck und nutzen diese zum Aufstellen der Zielfunktion bei einem Extremwertproblem. Die Lernenden stellen die Gleichung einer Normalen auf und wissen, wie der Abstand zweier Punkte berechnet wird. Die Jugendlichen bestimmen das Volumen von Rotationskörpern.

Im Allgemeinen sollten die Schülerinnen und Schüler sicher im Umgang mit Exponentialfunktionen sein und diese sowohl integrieren als auch differenzieren können. Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden mit dem GTR/CAS-Rechner und GeoGebra geübt sind.



### Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 23.05.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler …

- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten,
- unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben"),
- wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an,
- wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen an,
- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge,

- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

**Methodisch-didaktische Anmerkungen:**

Sie weisen Ihre Schülerinnen und Schüler darauf hin, dass bei Aufgabe 1) und Aufgabe 2a) die Operatoren eine Berechnung per Hand verlangen. Bei den Aufgaben [illegible]b), 5b) und 5c) muss die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion durch einen Punkt, der nicht auf dem Graphen der Funktion liegt, gelegt werden. Insbesondere bei schwächeren Lerngruppen besprechen und veranschaulichen Sie das Verfahren zur Bestimmung der Tangentengleichung vor der Bearbeitung der Aufgabe. Wird Aufgabe 5b) nicht mithilfe einer Schnittgerade gelöst, so bearbeiten Aufgabe 5c) nur die leistungsstarken Schülerinnen und Schülern. Eine Veranschaulichung bzw. Kontrolle der Lösungen kann mithilfe von GeoGebra geschehen. Die Aufgaben beinhalten eine Vielzahl von Aufgabenstellungen, wie sie auch im Abitur vorkommen können. Sie eignen sich daher sehr gut zur Vorbereitung auf das Abitur.

## Aufgaben

**M1**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0{,}5 \cdot \left(x^2 - x - 6\right) \cdot e^{-x}$.

**Hinweis:** Runden Sie (Zwischen-) Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen.

1.
   a) Berechnen Sie mithilfe der Ableitungsregeln die Ableitungsfunktion $f'(x)$.
   b) Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit der x-Achse sowie die Extremstellen des Graphen der Funktion f. Geben Sie an, ob es sich um eine Maximum- oder Minimumstelle handelt.
   c) Zeigen Sie, dass $F(x) = \left(0{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x - 2{,}5\right) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.
2. Der Graph der Funktion hat die Extrempunkte $E_1(-1{,}19 \mid 5{,}58)$ und $E_2(4{,}19 \mid -0{,}06)$.
   a) Überprüfen Sie rechnerisch, ob es sich um globale Extrempunkte handelt.
   b) Eine Gerade g verläuft durch die Extrempunkte. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.
   c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f sowie die Gerade g in das nachfolgende Koordinatensystem: