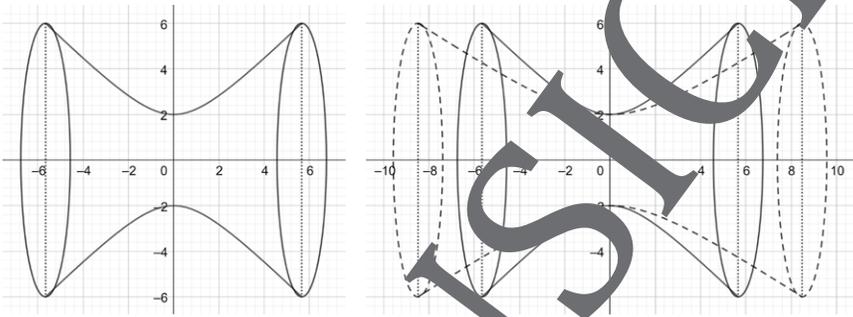


Extremwertprobleme und Flächenberechnungen bei einer Wurzelfunktionenschar

Günther Weber



© Günther Weber

Bei einer Wurzelfunktionenschar und einer Parabelschar, die oft fälschlicherweise von Schülerinnen und Schülern aus der Wurzelfunktionenschar hergeleitet wird, werden die Parameter bestimmt, sodass bestimmte Eigenschaften vorliegen. Erweitert werden diese Aufgabenstellungen noch um Aufgaben zur Flächenberechnung von Dreiecken sowie zur Volumenberechnung von Körpern, die bei der Rotation eines Graphen um die x-Achse entstehen.

Extremwertprobleme und Flächenberechnungen bei einer Wurzelfunktionenschar

Oberstufe (weiterführend)

Günther Weber

Hinweise	1
Aufgaben	3
Lösungen	6

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Eigenschaften der Achsensymmetrie und des asymptotischen Verhaltens der Wurzelfunktionenschar nachzuweisen und den Extrempunkt zu bestimmen. Zudem überprüfen sie, ob Parameter für bestimmte Steigungen bzw. Schnittpunkte vorhanden sind. Ebenso führen sie Flächenberechnungen von Flächen zwischen dem Graphen der Wurzelfunktion- und der Geradenschar, zwischen dem Graphen der Funktion f_2 und der x-Achse sowie zwischen dem Graphen der Funktion f_2 und dem Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion durch. An dem Graphen der Funktion f_2 legen die Lernenden eine Tangente an, sodass ein Dreieck mit bestimmten Eigenschaften entsteht, und zwischen den Graphen der Funktion f_2 und einer Geraden zur x-Achse legen sie ein Rechteck, das maximalen Inhalt haben soll. Rotiert der Graph einer in ihrem Definitionsbereich eingeschränkten Wurzelfunktion um die y- bzw. x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper, an dem die Jugendlichen Volumenberechnungen durchführen. Eine Streckung in Richtung der x-Achse verändert den Graphen der Funktion f_2 . Die Auswirkungen auf Durchmesser und Höhe des Rotationskörpers beschreiben die Lernenden.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Thema	Material	Methoden
Aufgaben	M1	h

Kompetenzprofil:

Inhalt: Wurzelfunktionenschar, Geradenschar, Nullstellen, Asymptote, Definitionsbereich, Tangenten, Extrempunkte, Randextrema, Umkehrfunktion, Flächenwertprobleme (Rechteck), Kegel (Volumen, Mantelfläche), Volumen Rotationskörper, Integral, Entwicklung von Funktionen

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler können die Gleichung einer Tangente an den Graphen einer Funktion in einem variablen Punkt des Graphen aufstellen. Eine Funktionsuntersuchung, auch bei einer Funktionenschar, bereitet ihnen keine Schwierigkeit. Die Lernenden kennen die Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreieck und Rechteck bzw. des Volumens und der Mantelfläche eines Kegels und können dies z. B. zum Aufstellen der Zielfunktion bei einem Extremwertproblem nutzen. Die Jugendlichen können das Volumen von Rotationskörpern berechnen. Im Allgemeinen sollten die Schülerinnen und Schüler sicher im Umgang mit Wurzelfunktionen sein und dies sowohl integrieren (mithilfe einer vorgegebenen Stammfunktion) als auch differenzieren können. Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden einen GTR/CAS-Rechner und GeoGebra (oder Geonix) bedienen können.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 05.01.2023) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen,
- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- verwenden notwendige, hinreichende und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten,
- wenden Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an,
- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten Integralen.

dem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

M1

Aufgaben

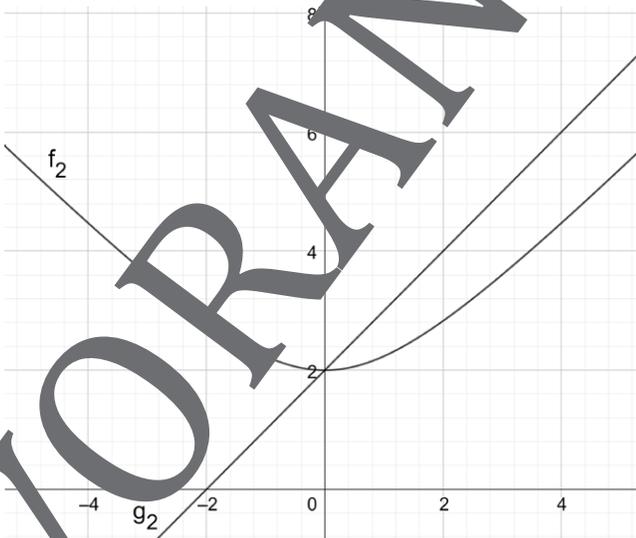
Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, $a \neq 0$ und die Geradenschar $g_a(x) = x + a$, $a \neq 0$. Eine Stammfunktion zur Funktionenschar f_a ist

$$F_a(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|.$$

1.

- Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar achsensymmetrisch zur y -Achse sind.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote der Funktionenschar f_a .
- Bestimmen Sie den absoluten Tiefpunkt der Graphen der Funktionenschar f_a .
- Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar f_a und g_a an keiner Stelle die gleiche Steigung haben.
- Überprüfen Sie, ob es eine Tangente an einen Graphen der Funktionenschar f_a in einem beliebigen Punkt $P(b | f(b))$ gibt, die durch den Ursprung verläuft.

2. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen je einer Funktion der Funktionenschar f_a und der Geradenschar g_a .



© G. Günther Weber

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



Über 5.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Webinare und Videos
für Ihre fachliche und
persönliche Weiterbildung



Attraktive Vergünstigungen
für Referendar:innen mit
bis zu 15% Rabatt



Käuferschutz
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de