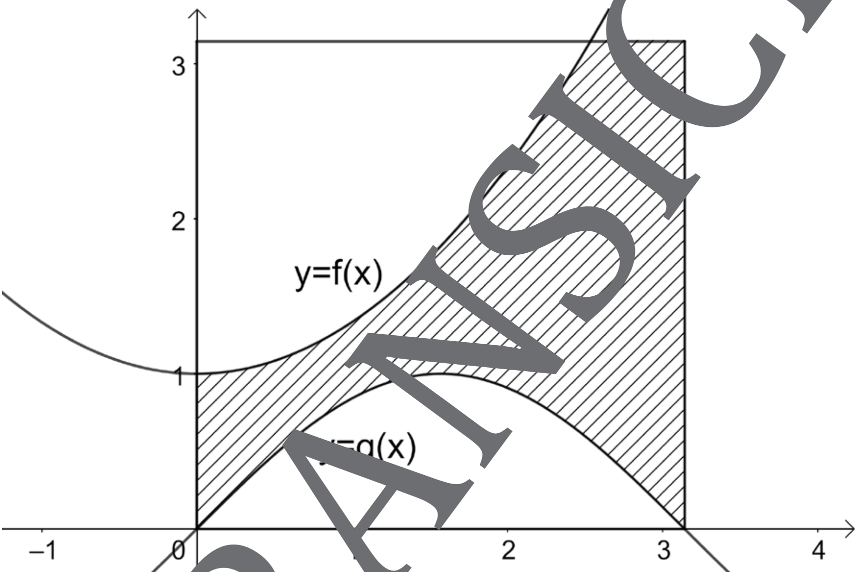
Integralrechnung – Graphen, Flächen und Volumina

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

In einer Reihe von Übungsbeispielen beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit der Berechnung von Flächen und Volumina mithilfe der Integralrechnung. Dabei werden nicht nur direkte Berechnungen durchgeführt, in einem Beispiel stehen die Lernenden auch vor der Herausforderung, Intervallgrenzen nur näherungsweise zu bestimmen. Auch der Vergleich zwischen berechneten Flächen und Volumina wird in den Fokus gerückt. Zuletzt führen die Jugendlichen auch Kurvendiskussionen zu gegebenen Funktionen durch und interpretieren die Körper, die entstehen, wenn eine Kurve um die Koordinatenachsen rotiert.

RAABE
KLASSE SCHULE

Integralrechnung – Graphen, Flächen und Volumina

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schü ler

- Integralrechnung
- Kurvendiskussionen
- näherungsweise Bestimmu g v tervallgrenzen
- Vergleich von Ergebnissen
- Interpretation von Graphen

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt **BA** Bildanalyse

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Funktionenscharen	M1, M2	AB, [illegible]
Polynomfunktion	M1–M[illegible]	AB
Funktion mit Wurzelterm	M1, M3	AB
Exponentialfunktion	M2	AB
Symmetriebestimmung	M[illegible]	AB
Näherungsweise Bestimmung ein[illegible]	M1	AB
Extremwertaufgabe (minimale/maximale Fläche)	M1, M3	AB
Vergleich verschiedener Ergebnisse	M2	AB
Interpretation von vorgegebenen Graphen	M2, M3	BA

Kompetenzprofil

Inhalt: Integral, Ableitung, Kurvendiskussion, Flächenberechnung, Volumenberechnung, Vergleich von Ergebnissen, näherungsweise Bestimmung, Extremwertaufgabe, Interpretation von Graphen

Medien: GTR, FS

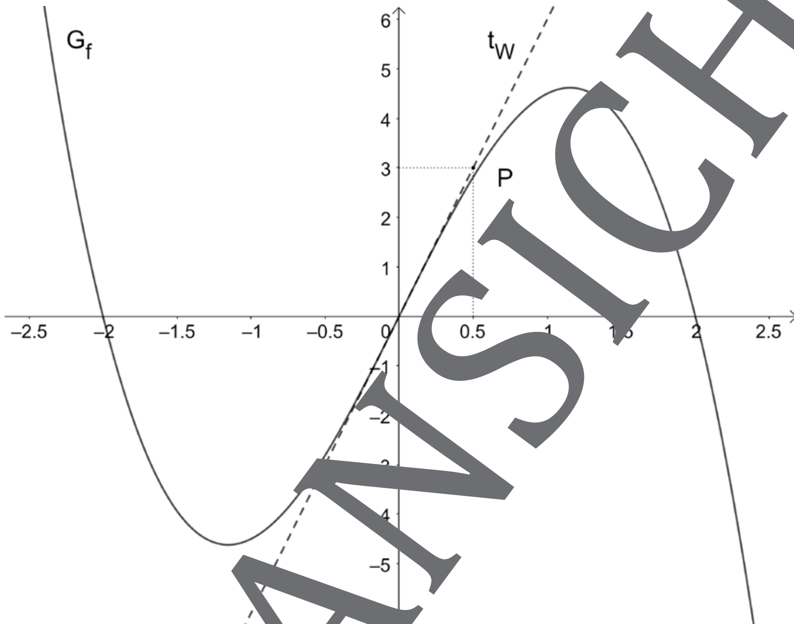
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Stromlinienkörper und näherungsweise Berechnung M1

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem hat der Graph einer Funktion die Gleichung $y = f(x) = a\sqrt{x} - bx,\ a, b \in \mathbb{R}^+$. Wenn der Graph G_f zwischen den Nullstellen um die x-Achse rotiert, so entsteht ein stromlinienförmiger Körper.
   a) Nun sei a = 5 und b = 0,5.
   Wie lang ist der Stromlinienkörper, wo ist der Durchmesser am größten und wie groß ist dieser Durchmesser D?
   Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an die Kurve in den Nullstellen.
   Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Tangenten (wählen Sie dazu eine geeignete Einteilung der Achsen).
   Welches Volumen hat der Stromlinienkörper?
   b) Nun seien a und b beliebig aus $\mathbb{R}^*$.
   Bestimmen Sie a und b so, dass der Körper die Länge 81 LE und einen Durchmesser 27 LE hat.
   c) Zeigen Sie, dass aus $b = \frac{2}{3}$ folgt, dass der Durchmesser des Körpers unabhängig von a ein Drittel seiner Länge beträgt.
2. Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = ax^3 + \frac{1}{a}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_a.
   a) Zeichnen Sie die Funktionsgraphen für $a = \frac{1}{2}$ und $a = \frac{3}{2}$ im Intervall I = [0; 2] in ein geeignetes Koordinatensystem. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen.
   b) Der Graph G_a schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden x = 2 eine Fläche A_a ein. Bestimmen Sie a so, dass der Flächeninhalt minimal ist.
   c) Rotiert das Flächenstück von Teilaufgabe 2b) um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie in Abhängigkeit von a das Volumen dieses Körpers.
3. Gegeben ist die ganzrationale Funktion 3. Grades mit der Gleichung
   $y = f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \ldots \frac{53}{\ldots}x - 42$ mit Graphen G_f.
   a) Bilden Sie die Ableitungsfunktionen f′ und f′′ und Zeichnen Sie die drei Graphen G_f, $G_{f'}$, $G_{f''}$ im Intervall $I = [-8; 8]$ in ein geeignetes rechtwinkliges Koordinatensystem. Unter welchem Winkel schneidet der Graph G_f für x = –8 die x-Achse?
   b) Die Graphen G_f, $G_{f'}$ und $G_{f''}$ schließen sechs Flächenstücke ein. Berechnen Sie **näherungsweise** den Inhalt des größten der Flächenstücke.
   c) Der Graph von f′′ rotiert von seiner Nullstelle bis x = 6 um die x-Achse. Wie heißt der entstehende Körper und wie groß ist sein Volumen?

M3 Funktionsbestimmung und Grapheninterpretation

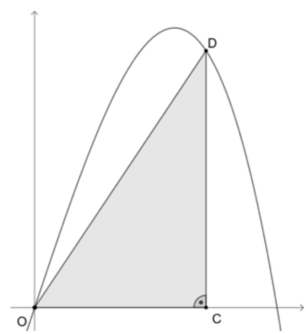
1. Gegeben ist der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion dritten Grades mit seiner Wendetangente t_W.



a) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f und berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks A, das der Graph G_f im 1. Quadranten mit der x-Achse einschließt.

b) In das Flächenstück A soll ein im Punkt C rechtwinkliges Dreieck OCD mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden, wobei der Punkt C auf der x-Achse und der Punkt D auf dem Graphen G_f liegen. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C sowie den maximalen Flächeninhalt.

c) Die Gerade g: y = 3x teilt das Flächenstück A in zwei Teile, einem Teil A_1 oberhalb der Geraden g und eine Fläche A_2 unterhalb von g. Berechnen Sie das Verhältnis $A_1 : A_2$ mit möglichst kleinen ganzen Zahlen.



Grafiken: Günter Gerstbrein