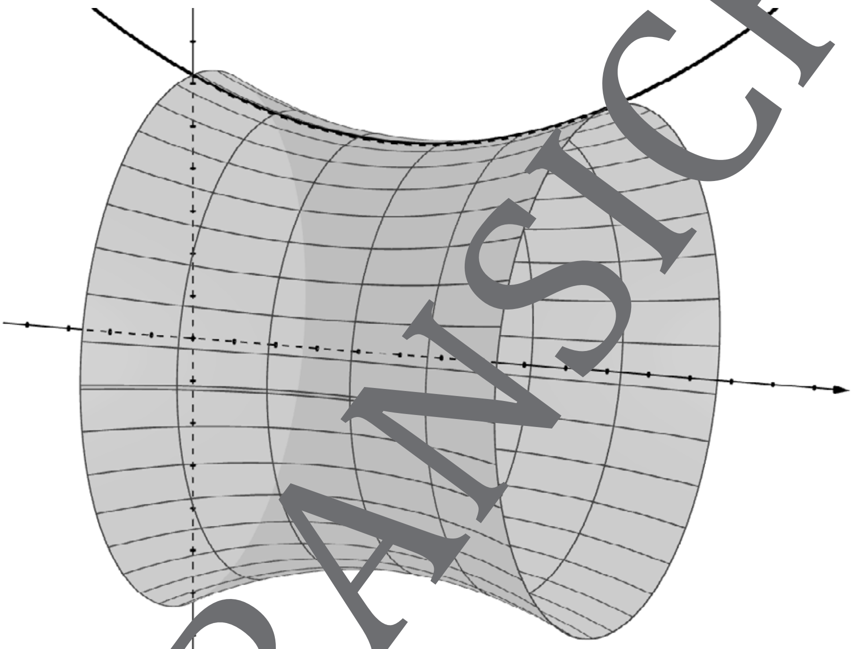
Die Vase und andere Rotationskörper

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstb[illegible]

Durch Rotation von Funktionsgraphen um die x-Achse entstehen Körper, deren Volumen die Schülerinnen und Schüler per Integralrechnung bestimmen können. Dabei lassen sich auch komplexere Körper durch abschnittsweise definierte Funktionen zusammensetzen. Auf diese Weise lassen sich auch reale Gegenstände wie eine Vase oder eine Glühbirne mit einigen mathematischen Funktionen beschreiben.

In den Aufgaben dieses Materials üben die Schülerinnen und Schüler die Integralrechnung, führen aber auch Kurvendiskussionen durch oder berechnen die Schnittpunkte verschiedener Funktionen.

Die Vase und andere Rotationskörper

Oberstufe (weiterführend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

– die Berechnung des Volumens von Rotationskörpern
– den Umgang mit verschiedenen Funktionsarten wie Exponentialfunktionen oder Wurzelfunktion
– den Umgang mit abschnittsweise definierten Funktionen
– Integration per Summenregel
– Integration per Substitution

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

einfaches Niveau   mittleres Niveau   schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Volumen von Rotationskörpern	M1	AB

Inhalt: Berechnung von Volumen, Integrieren, Differenzieren, Substitutionsmethode, Stammfunktion, Wurzelfunktion, Exponentialfunktion, rationale Funktion, gebrochenrationale Funktion, abschnittsweise definierte Funktion

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Aufgaben **M1**

1. Gegeben ist die Funktion f in $D_f = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$ durch folgende Zuordnung:
   $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{e^{x-1} + e^{1-x}}{2}}$ mit Graphen G_f
   a) Skizzieren Sie den Graphen G_f der Funktion f in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
   b) Rotiert der Graph G_f in D_f um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper, der die Form einer VASE besitzt.
   – In welcher Höhe ist der Flächeninhalt des Querschnitts minimal?
   – Wie viele Liter Wasser passen in die Vase, wenn 1 LE = 1 dm?
   – Berechnen Sie näherungsweise, wie hoch stehend das Wasser steht, wenn die Vase zu drei Viertel voll ist?

2. Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_a.
   a) Zeichnen Sie den Graphen für a = 9 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
   b) Bestimmen Sie mithilfe der Substitutionsmethode eine Stammfunktion
   F_a von $\left(\text{zur Kontrolle: } F_a(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{(a - x^2)^3} + C\right)$ f_a.
   c) Der Graph G_a schließt mit der x-Achse im 1. Quadranten ein Flächenstück A ein. Berechnen Sie in Abhängigkeit von a diesen endlichen Flächeninhalt.
   d) Das Flächenstück von Teilaufgabe 2c) rotiert um die x-Achse.
   Berechnen Sie das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers in Abhängigkeit von a.
   e) Dem Rotationskörper von Teilaufgabe 2d) wird ein gerader Kreiszylinder so umbeschrieben, dass dessen Mantellinien parallel zur x-Achse sind. In welchem Verhältnis stehen die Volumina von Rotationskörper und Zylinder? Was fällt auf?

3. Gegeben sind die Funktionen $y = f(x) = 3\sqrt{x}$ und $y = g(x) = \sqrt{36 - 3x}$ mit Graphen G_f und G_g sowie jeweils maximaler Definitionsmenge.
   a) Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_g in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte.
   b) Die beiden Graphen begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, das um die x-Achse rotiert. Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?