

Lösungsvielfalt durch Näherungsverfahren

Dr. Wilfried Zappe



© Andriy Onufriyenko / Moment / Getty Images Plus

Kurvendiskussionen, Flächen- oder Volumenberechnungen sowie Extremwertuntersuchungen bei einfachen, verketteten Wurzelfunktionen führen häufig zu Gleichungen, für die es keine in der Schule behandelten Lösungsverfahren gibt. Mit einem CAS-Rechner ist das Lösen solcher Gleichungen i. A. kein Problem. Im Mathematikunterricht und im Abitur sind in einigen Bundesländern aber keine CAS-Rechner, sondern nur einfachere wissenschaftlich-technische Rechner (WTR) zugelassen. Einige WTR bieten auch verschiedene Möglichkeiten, solche Gleichungen näherungsweise zu lösen. Die Anwendung solcher Verfahren ist ein besonderer Aspekt in diesem Material. Dadurch entsteht eine große Vielfalt an Lösungsmöglichkeiten.

Lösungsvielfalt durch Näherungsverfahren

Oberstufe (weiterführend)

Dr. Wilfried Zappe

Hinweise	1
M1 Übungsaufgaben	2
M2 Lernerfolgskontrolle	3
Bewertungsmaßstab	4
Lösungsvorschläge zu M1; Aufgabe 1	5
Lösungsvorschläge zu M1; Aufgabe 2	9
Lösungsvorschläge zu M1; Aufgabe 3	13
Lösungsvorschläge zu M2; Aufgabe 1	14
Lösungsvorschläge zu M2; Aufgabe 2	17

© RAABE 2023

Die Schülerinnen und Schüler üben:

- das Ableiten verkettenner Wurzelfunktionen,
- Untersuchen von Definitionsbereich, Nullstellen und Symmetrie
- das Bestimmen lokaler Extrempunkte,
- das Ermitteln von Flächeninhalten,
- das Berechnen der Volumina von Rotationskörpern,
- die Anwendung von Verfahren zum näherungsweise Lösen von Gleichungen

Kompetenzprofil:

Mathematisch argumentieren (K1)	Begründungen angeben z. B. für Symmetrie, Existenz von Nullstellen und lokalen Extrempunkten
Probleme mathematisch lösen (K2)	Lösungswege finden
Mathematisch modellieren (K3)	Mathematisches Modell für Rotationskörper anpassen
Mathematische Darstellungen verwenden (K4)	Grafische Darstellungen von Funktionen erzeugen
Mit ... technischen Elementen ... umgehen (K5)	WTR ¹ gezielt einsetzen, auch zum näherungsweise Lösen von Gleichungen
Mathematisch kommunizieren (K6)	Mehrschrittige Lösungswege verständlich darlegen (Kurvendiskussion, Flächen- und Volumenberechnung)

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt**TA**-Tafelbild

einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Kurvendiskussion, Graph	M1, Aufgabe 1	AB, TA
Volumen von Rotationskörpern, Extremwertprobleme, Näherungsverfahren	M1, Aufgabe 2	AB, TA
Nachweis Stammfunktion, Flächeninhalte	M1, Aufgabe 3	AB, TA
Ergebnisrückkontrolle	M2	AB

¹ WTR: Wissenschaftlich-technische Taschenrechner

Hinweise

In den Bildungsstandards zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife heißt es für das erhöhte Anforderungsniveau u. a.:

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen [...] auswählen,
- Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen,
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachsen entstehen,
- in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen,
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren,
- die Produktregel [...] und die Kettenregel zum Ableiten von Funktionen verwenden

Diese Handlungsaspekte spielen in den hier betrachteten Aufgaben eine wichtige Rolle. In der Leitidee „Algorithmus und Zahl“ heißt es u. a. noch: „Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden von schematischen Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind.“

Diesem Gedanken werden die Aufgabenteile zum Näherungslösen von Gleichungen durch Iterationsverfahren gerecht. Dazu bleibt es der Lehrkraft überlassen, welche der hier im Lösungsteil vorgestellten Verfahren beim Üben automatisiert werden. Dies hängt auch davon ab, welche Näherungsverfahren bisher Gegenstand im Unterricht waren. Insbesondere sollte den Lernenden klar sein, dass die Näherungsverfahren nicht immer zum Ziel führen, z. B. bei ungünstig gewählten Startwerten.

M1 Übungsaufgaben

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{4} \times \sqrt{8 - \frac{x^2}{2}}$.



Aufgabe 1: Kurvendiskussion und grafische Darstellungen

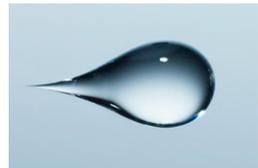
- Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich D_f von f im Bereich der reellen Zahlen.
- Berechnen Sie die Nullstellen von f .
- Begründen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
- Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte von f .
- Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion f und skizzieren Sie den Graphen von f .
- Ergänzen Sie die grafische Darstellung der Funktion f durch den Graphen von $k(x) = -f(x)$.
- Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von f hervorgeht.



Aufgabe 2 Rotationskörper und Extremwertaufgabe; Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen

- Der Graph von f rotiert im Intervall $0 \leq x \leq 4$ um die x -Achse.

Berechnen Sie das Volumen V_1 des dabei entstehenden tropfenförmigen Rotationskörpers K_1 .



- Das durch die Punkte $P(u|0)$, $Q(4|0)$ und $R(4|f(u))$ mit $0 < u < 4$ gebildete Dreieck erzeugt bei Rotation um die x -Achse einen Körper K_2 , der innerhalb des in Teilaufgabe 2a) betrachteten Rotationskörpers K_1 liegt. Bestimmen Sie u so, dass K_2 ein möglichst großes Volumen besitzt. Geben Sie V_2 als maximale Volumen an.

© Yamada Taro

Hinweis: Nutzen Sie ggf. ein Näherungsverfahren zum Lösen notwendiger Gleichungen.



Aufgabe 3 Stammfunktion und Flächeninhalt

- Werten Sie nach, dass die Funktion $F(x) = \frac{1}{24} \cdot (x^2 - 16) \cdot \sqrt{32 - 2x^2}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen von $f(x)$ und $k(x) = -f(x)$ vollständig eingeschlossen wird.

Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



Über 5.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Webinare und Videos
für Ihre fachliche und
persönliche Weiterbildung



Attraktive Vergünstigungen
für Referendar:innen mit
bis zu 15% Rabatt



Käuferschutz
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de