P.1.18

Tests

Exponentialfunktionen, Sinus, Kosinus und andere Funktionen – Übungstests aus Analysis

Alfred Müller

© Natee Meepian / iStock / Getty Images Plus

Machen Sie sich mit sechs Übungstests, die sich auch als Abiturvorbereitung nutzen lassen, ein Bild über den Kenntnisstand Ihrer Schülerinnen und Schüler. Alternativ können die Jugendlichen sich damit auch selbstständig auf die Probe stellen. Zeitangaben und Bewertungsschlüssel sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.

Die Lernenden üben die Differenzial- und Integralrechnung anhand verschiedener Funktionen. Auch Kurvendiskussionen, das Berechnen von Volumen per Rotation um die x-Achse oder das Lösen von Exponentialgleichungen sind Teil der Aufgaben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Abiturvorbereitung, Übung
Thematische Bereiche:	Exponentialfunktion, Kosinus, Sinus, Exponentialgleichung, Wurzel, Arkuskosinus, gebrochenrationale Funktion, Kurvendiskussion, Differenzieren, Integrieren

Fachliche Hinweise

Die Jugendlichen sind in der Lage, verschiedene Funktionen zu differenzieren und zu integrieren und Kurvendiskussionen durchzuführen sowie Gleichungen zu lösen. Als Abiturvorbereitung sollte der Stoff der Oberstufe vorausgesetzt werden können.

Auf einen Blick

Übungstests aus Analysis

M 1 Exponentialfunktion
M 2 Kosinusfunktion
M 3 Rationale Funktionenschar und Wurzel
M 4 Exponentialfunktion und Exponentialgleichungen
M 5 Gebrochenrationale Funktion und Arkuskosinus
M 6 Sinus- und Kosinusfunktion

Erklärung zu den Symbolen

leichtes Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau

Exponentialfunktion

M 1

1. Gegeben ist die in $D_a = \mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung

   $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2 - a^2)}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und Graphen G_a.

   a) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf Symmetrie sowie auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie dann die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$. **[6 BE]**

   b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen f_a sowie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte. **[10 BE]**

   c) Zeichnen Sie den Graphen G_1 für a = 1 im Intervall $I = [-3; 3]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Verwenden Sie: 1 LE = 2 cm. **[6 BE]**

2. Stammfunktion und Integralfunktion

   a) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2-1)} + e^{\frac{1}{2}}$ eine Stammfunktion zur Funktion f_1 ist. **[5 BE]**

   b) Die Funktion $G(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$ ist eine Integralfunktion zur Funktion f_1.

   Geben Sie die Funktion G integralfrei an. **[4 BE]**

   c) Bestimmen Sie mithilfe der Funktion G den Inhalt der Fläche, die der Graph G_1 zwischen seinen Nullstellen mit der x-Achse einschließt. **[5 BE]**

   d) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} G(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch. **[4 BE]**

Arbeitszeit: 50 Minuten **Gesamt: [40 BE]**

Rationale Funktionenschar und Wurzel

M 3

1. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = (1-a)x^2 + ax, a \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ mit den Graphen G_a.
   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der x-Achse sowie Lage und Art des Extremwertes der Funktion f_a in Abhängigkeit von a. **[5 BE]**
   b) Für a > 1 liegt die vom Graphen G_a und der x-Achse eingeschlossene Fläche $A(a)$ ganz im 1. Quadranten. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. **[4 BE]**
   c) Bestimmen Sie den Wert für a > 1 so, dass der Flächeninhalt maximal ist. Gehen Sie dabei davon aus, dass der gefundene Extremwert ein Maximum ist, d. h. ein Nachweis für die Art des gefundenen Extremums wird nicht verlangt. **[6 BE]**

2. Gegeben ist die Funktion $g_a(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x(2a-x)}}, a \in \mathbb{R}_0^+$ mit den Graphen G_a.
   a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_a der Funktion g_a. Untersuchen Sie die Grenzwerte von g_a an den Grenzen von D_a. **[4 BE]**
   b) Beweisen Sie: Für 0 < d < a gilt: $g_a(a-d) = g_a(a+d)$. Welche Aussage macht diese Gleichung? **[3 BE]**
   c) Weisen Sie ohne Benutzung der 2. Ableitung nach, dass jede Funktion g_a einen Tiefpunkt besitzt. Welche Koordinaten hat dieser Tiefpunkt T_a und auf welcher Ortskurve K mit der Gleichung $y = k(x)$ liegen alle Tiefpunkte T_a? **[9 BE]**
   d) Stellen Sie fest, ob zwei zu verschiedenen Parameterwerten a_1 und a_2 gehörende Graphen gemeinsame Punkte haben können. **[4 BE]**
   e) Skizzieren Sie den zu a = 2 gehörenden Graphen der Funktion g_2 mithilfe einer Wertetabelle in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. **[5 BE]**

Arbeitszeit: 50 Minuten **Gesamt: [40 BE]**