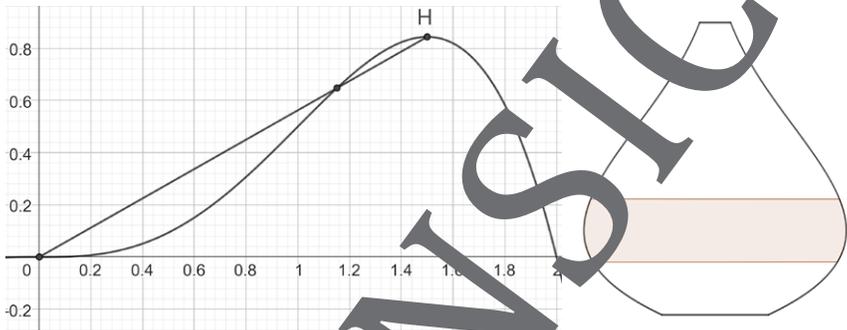


## A.1.36

### Ganzrationale Funktionen

# Wendepunkt, Extremwertprobleme und ein Rotationskörper bei einer ganzrationalen Funktionenschar

Günther Weber



© RAABE 2024

© Günther Weber

Funktionsuntersuchungen mit der Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten einer Funktion gehören zu den Standardaufgaben des Analysisunterrichts der Oberstufe. Erweitert wird diese Aufgabensstellung um die zeichnerische Ermittlung des Wendepunktes und um die Betrachtung der „Güte“ der zeichnerisch ermittelten Wendestelle. Die Funktionsuntersuchung lässt sich um Extremwertaufgaben erweitern, indem zwischen zwei Graphen Dreiecke oder Rechtecke eingefügt werden, deren Flächeninhalt maximal wird. Ebenso können Graphen den Umriss eines Rotationskörpers wiedergeben. Dieser Rotationskörper wird hinsichtlich Volumen und Oberfläche untersucht.

---

## KOMPETENZPROFIL

|                      |   |
|----------------------|---|
| <b>Klassenstufe:</b> | 10/11/12/13   |
| <b>Dauer:</b>        | 4–5 Unterrichtsstunden  |
| <b>Kompetenzen:</b>  | Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischer, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien  |
| <b>Methoden:</b>     | Computer- und Softwareeinsatz, digitale Übung, Übung  |
| <b>Materialart:</b>  | GeoGebra-Datei, Grafik,   |
| <b>Inhalt:</b>       | Ganzrationale Funktion 4. Grades, Null- und Schnittstellen, Extrem- und Wendepunkte, Prozentrechnung, Tangente und Berührungspunkt, Normale, Wendetangenten, Ortslinie, Extremwertproblem, bestimmtes Integral, Rotationskörper (Volumen, Oberfläche) |

---

## Didaktisch-methodische Hinweise

### Lernvoraussetzungen

Eine Funktionsuntersuchung, auch bei Funktionen mit Parametern, bereitet Ihren Schülerinnen und Schülern keine Schwierigkeiten und sie können die Gleichungen von Tangenten, Normalen und Wendetangenten aufstellen. Die Lernenden wissen, dass die Berechnung des Schnittwinkels von Graphen auf die Berechnung des Schnittwinkels von Tangenten an den Graphen zurückgeführt werden kann. Ihnen ist bekannt, dass die Steigung einer Geraden mithilfe der Funktionsfunktion bestimmt werden kann, und sie wissen, dass das Produkt der Steigungen zweier Geraden, die senkrecht aufeinanderstehen, gleich  $-1$  ist. Die Jugendlichen können die Zielfunktion bei einem Extremwertproblem aufstellen und Extremwertprobleme lösen. Im Allgemeinen sind sie sicher im Umgang mit ganzrationalen Funktionen und dazu fähig, diese sowohl zu integrieren als auch zu differenzieren. Volumen- und Oberflächenberechnungen an Rotationskörpern können von Ihren Schülerinnen und Schülern unter Vorgabe der Formel zur Berechnung der Bogenlänge durchgeführt werden.

Vorteil ist es, wenn die Lernenden sicher im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner sind und eine Anschaulichung der Aufgabenstellungen bzw. Lösungen mithilfe von GeoGebra ihnen keine Schwierigkeiten bereitet.

## Lehrplanbezug

Im Kernlernplan

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost\\_klp\\_m\\_2023\\_06\\_17.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_17.pdf) (aufgerufen am 04.08.2024) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

### Die Schülerinnen und Schüler ...

- deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
- bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Neigungswinkel,
- nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten,
- verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsgraphen,
- bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“),
- ermitteln Flächeninhalte (Volumen von Rotationskörpern, Bogenlänge von Graphen) mithilfe von bestimmten Integralen,
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

### Methodisch-didaktische Anmerkungen

Bei leistungsschwächeren Lerngruppen geben Sie bei **Aufgabe 1a)** als Lehrkraft noch den Hinweis, dass der gesuchte Wendepunkt vom Ursprung verschieden ist, und bei **Aufgabe 1d)** weisen Sie darauf hin, dass der Definitionsbereich des Parameters  $a$  zu beachten ist. Wurde das Verfahren zur Bestimmung der Tangentiale eines Punktes längere Zeit im Unterricht nicht behandelt, so wiederholen Sie dieses Verfahren vor der Bearbeitung von **Aufgabe 2a)** im Unterrichtsgespräch. Vor der Bearbeitung des Teils (i) von **Aufgabe 2c)** kontrollieren Sie, ob Ihre Schülerinnen und Schüler die Gleichung der Wendetangente richtig bestimmt haben. Insbesondere bei schwächeren Lerngruppen veranschaulichen Sie beim Teil (i) der **Aufgabe 3f)** den gesuchten Winkel mithilfe von GeoGebra. Sie erinnern die Lernenden daran, dass mit der Geradensteigung der Neigungswinkel der Geraden gegen die  $x$ -Achse bestimmt wird.

Die Aufgaben beinhalten eine Vielzahl von Aufgabenstellungen, wie sie auch im Abitur vorkommen können. Sie eignen sich daher auch zur Vorbereitung auf das Abitur.

## Aufgaben

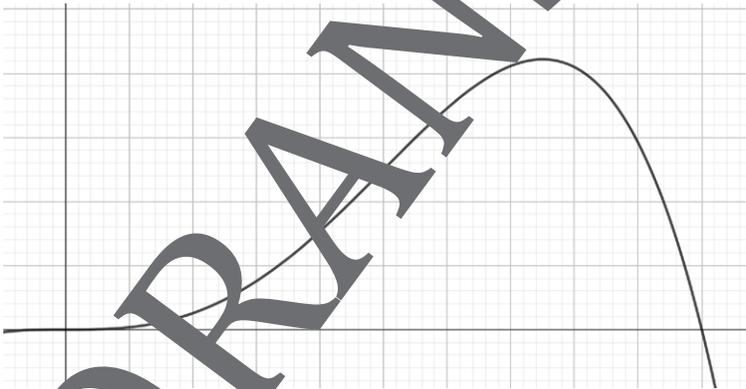
M 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_{a,b}(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^4$ ;  $a, b > 0$
- Bestimmen Sie rechnerisch die Extrempunkte der Schar und geben Sie die Art des Extremums an.
  - Bestimmen Sie rechnerisch die Wendepunkte der Schar.  
**Hinweis:** Zur Berechnung der Funktionswerte bietet es sich an, das Argument in den faktorisierten Term  $f_{a,b}(x) = x^3 \cdot (a - b \cdot x)$  einzusetzen.

In der Lösung einer Abituraufgabe aus dem Abitur 2012 des Landes Sachsen-Anhalt für den Leistungskurs findet sich folgendes Verfahren zur näherungsweise graphischen Bestimmung des Wendepunktes für eine Funktion der Funktionenschar:

Den Wendepunkt kannst du näherungsweise bestimmen, indem du zwei tangente Tangenten an die Stellen, an denen  $f'(x) = 0$  ist, legst und eine Gerade durch die Berührungspunkte zeichnest. Der Schnittpunkt der Strecke zwischen den Berührungspunkten und dem Graphen ist dann näherungsweise der Wendepunkt.

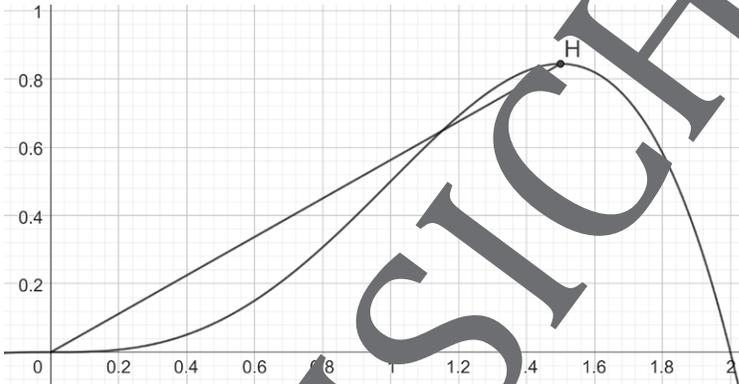
- Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Graphen der Funktionenschar. Bestimmen Sie graphisch mit dem oben beschriebenen Verfahren näherungsweise den Wendepunkt.



Graph: Günther Web

- Überprüfen Sie, ob es Parameter  $a$  und  $b$  gibt, sodass der zeichnerisch ermittelte Wendepunkt mit dem rechnerisch bestimmten Wendepunkt übereinstimmen.

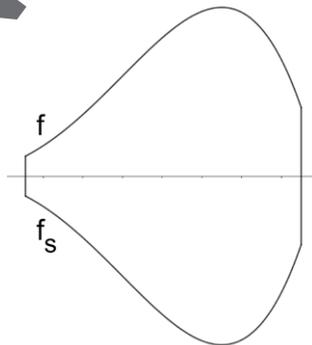
- e) Auf der Strecke zwischen dem Ursprung und dem Hochpunkt liegt die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Der weitere Eckpunkt liegt auf dem Graphen der Funktion  $f$  und hat die Koordinaten  $C(k | f(k))$ .
- i. Zeichnen Sie das Dreieck für  $k=0,8$  in die nachfolgende Abbildung.



- ii. Bestimmen Sie  $k$  so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.

- f) Der Graphen der Funktion  $f$  sowie ihrer Spiegelung  $f_s$  an der  $x$ -Achse bilden im Intervall  $[a;b]$  die innere Querschnittsfläche eines bauchigen Gefäßes ( $1LE \hat{=} 1dm$ ). Die Öffnung des Gefäßes hat einen Durchmesser von  $2\text{ cm}$  und die kreisförmige Standfläche eine Größe von  $36,95\text{ cm}^2$ .

- i. Berechnen Sie den Winkel, in dem die innere Mantelfläche und die Standfläche zusammenstoßen.
- ii. Das Gefäß ist bis  $5\text{ cm}$  unter dem oberen Rand mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Liter Wasser sich in dem Gefäß befinden und berechnen Sie die Größe der Fläche im Inneren des Gefäßes, die mit dem Wasser in Berührung kommt.
- iii. Das Gefäß wird mit  $1\text{ Liter}$  einer Flüssigkeit gefüllt. Berechnen Sie, wie hoch die Flüssigkeit im Gefäß steht.



Grafiken: Günther Weber

# Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.  
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online  
14 Tage lang kostenlos!

[www.raabits.de](http://www.raabits.de)

