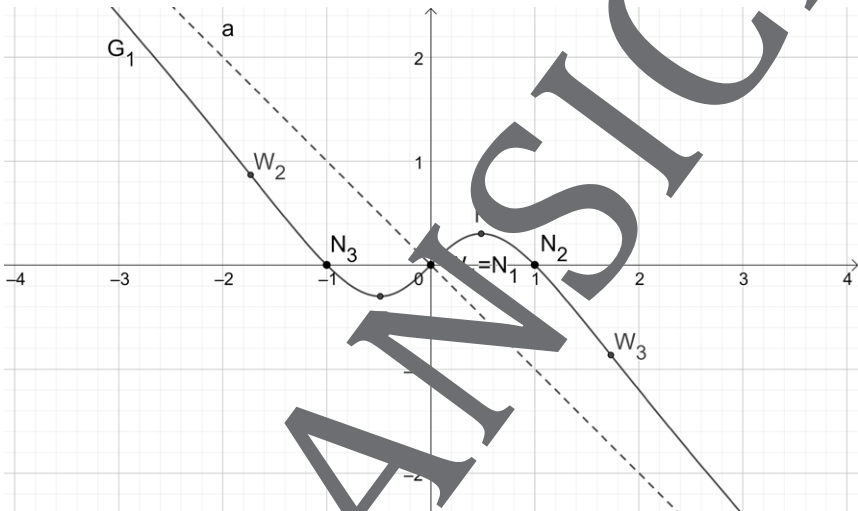


## G.4.9

### Rationale Funktionen und Exponentialfunktionen

## Vermischte Übungen mit Funktionenscharen: Gebrochenrationale Funktionen, Exponentialfunktion und ein Kreis

Alfred Müller



© RAABE 2024

Grafik: Günter Gerstbrein

In sechs umfangreichen Übungsaufgaben beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Funktionen und Funktionenscharen. Gebrochenrationale Funktionen kommen dabei ebenso vor wie die Exponentialfunktionen. Auch ein Kreis bzw. Halbkreis wird in Form einer Wurzelfunktion hier in Augenschein genommen. Die Aufgaben drehen sich um die Bestimmung von Asymptoten, Extrem- und Wendestellen sowie um das Berechnen von Flächeninhalten und Volumina.

## KOMPETENZPROFIL

**Klassenstufe:** 11/12/13

**Kompetenzen:** Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischer Formaten und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz

**Methoden:** Übung, Diskussion

**Thematische Bereiche:** Gebrochenrationale Funktion, Exponentialfunktion, Wurzelfunktion, Kreisgleichung, Parabel, Wendepunkt, Hochpunkt, Tiefpunkt, Differenzialrechnung, Integralrechnung

## Fachliche Hinweise

Die Jugendlichen sind in der Lage, vergebene Funktionen zu differenzieren und zu integrieren und Kurvendiskussionen durchzuführen sowie Gleichungen zu lösen. Der Schwerpunkt der Aufgaben liegt dabei auf gebrochenrationalen Funktionen und Funktionenscharen, doch beschäftigen sich einzelne Aufgaben auch mit Wurzel- oder Exponentialfunktionen.

© RAABE 2024

## Auf einen Blick

Gebrochenrationale Funktion, Exponentialfunktion und ein Kreis

M 1 Aufgaben

Erkennung zu den Symbolen

 einfaches Niveau	 mittleres Niveau	 schwieriges Niveau
--	--	--

## Aufgaben

### 1. Flächen und Volumina

- Gegeben ist die Funktion  $f$  durch die Zuordnung  $y=f(x)=\sqrt{5x}$  mit Graphen  $G_f$ . Die Tangente im Kurvenpunkt  $B(5|y_B)$  und die  $x$ -Achse begrenzen ein Flächenstück  $A$ . Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.
- Jetzt ist die Funktionenschar  $f_a$  durch ihre Gleichung  $y=f_a(x)=\sqrt{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  und Graphen  $G_a$  festgelegt.  
Im Kurvenpunkt  $P(a|y_P)$  wird die Tangente  $t$  an den Graphen  $G_a$  gelegt. Geben Sie den Schnittpunkt dieser Tangenten mit der  $x$ -Achse in Abhängigkeit von  $a$  an.
- Das vom Graphen  $G_a$ , der Tangente im Punkt  $P$  und der  $x$ -Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die  $x$ -Achse. Zeigen Sie: Die zur  $x$ -Achse senkrechte Ebene bei  $x=0$  zerschneidet den Rotationskörper in zwei volumengleiche Teilkörper.
- Bestimmen Sie dann den Wert für  $a$  so, dass das Volumen des beschriebenen Rotationskörpers den Wert  $V=4,5\pi$  VE besitzt.

### 2. Gegeben ist die Funktion $f$ durch ihre Gleichung $y=f(x)=\frac{x^2-27x+54}{6(x-2)}$ mit Graphen $G_f$ und maximaler Definitionsmenge $D_f$ .

- Bestimmen Sie  $D_f$  sowie die Nullstellen und Asymptoten des Graphen  $G_f$ .
- Berechnen Sie Koordinaten und Art der Extrempunkte und des Wendepunktes.
- Zeichnen Sie den Graphen  $G_f$  anhand einer Wertetabelle im Bereich  $I=[-8; 8]$ .
- Die Tangente  $t$  und die Normale  $n$  an der negativen Nullstelle  $N$  bilden mit der  $y$ -Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.



3. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  durch ihre Gleichung  $y = f_a(x) = \frac{x^2 + a}{x^2}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .  
 Definitionsmenge  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und Graphen  $G_a$ .

- Zeichnen Sie den Graphen  $G_2$  für  $a = 2$  einschließlich seiner Asymptoten im Intervall  $I = ]-5; 5[$ .
- Berechnen Sie den Inhalt  $A(b)$  derjenigen Fläche, die der Graph  $G_2$  zwischen  $x = 1$  und  $x = b$  ( $b > 1$ ) mit der  $x$ -Achse einschließt. Untersuchen Sie dann  $A(b)$ .
- Die Tangente im Kurvenpunkt  $P(2|y_p)$  bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie  $a$  so, dass dieses Dreieck extremalen Flächeninhalt besitzt. Welcher Art ist der Extremwert und wie groß ist dieser Flächeninhalt?



4. Gegeben ist die in  $D = \mathbb{R}$  definierte Schar von Funktionen  $f_a$  durch ihre Gleichung  $y = f_a(x) = \frac{x - ax^3}{x^2 + 1}$  mit dem Graphen  $G_a$ .

- Berechnen Sie den Parameterwert  $a$  so, dass der zugehörige Graph an der Stelle  $x = 1$  die Steigung  $m = 2$  besitzt.
- Nun sei  $a = 1$ .  
 Berechnen Sie für den Graphen  $G_1$  die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und alle Asymptoten. Liegt eine Symmetrie vor? Geben Sie auch die Definitionsmenge für  $a = 1$  an.
- Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte sowie die Koordinaten der Wendepunkte.
- Zeichnen Sie den Graphen  $G_1$  im Intervall  $I = [-4; 4]$  (1 LE = 2 cm).
- Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte des Graphen  $G_1$ , die von der schiefen Asymptote den größten Abstand besitzen.



5. Gegeben ist ein Kreis  $K: x^2 + y^2 = r^2$ , der in den Punkten  $A(0,5r|y_1)$  und  $B(0,5r|-y_1)$  von einer Parabel mit der Gleichung  $y = \pm c \cdot \sqrt{d-x}$  berührt wird.

- Bestimmen Sie die Parameter  $c$  und  $d$  in Abhängigkeit von  $r$ .
- Wenn die Kreishälfte und das von Parabel und Kreis begrenzte sichelförmige Gebiet um die  $x$ -Achse rotiert, entsteht ein eiförmiger Körper, dessen Volumen sich aus einem Kugelsegment und einem Rotationsparaboloid zusammensetzt.  
 Berechnen Sie das Volumen des Kugelsegments und des Paraboloids.  
 Welches Volumen hat so ein „Ei“, wenn es 6 cm lang ist?

# Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.  
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online  
14 Tage lang kostenlos!

[www.raabits.de](http://www.raabits.de)

