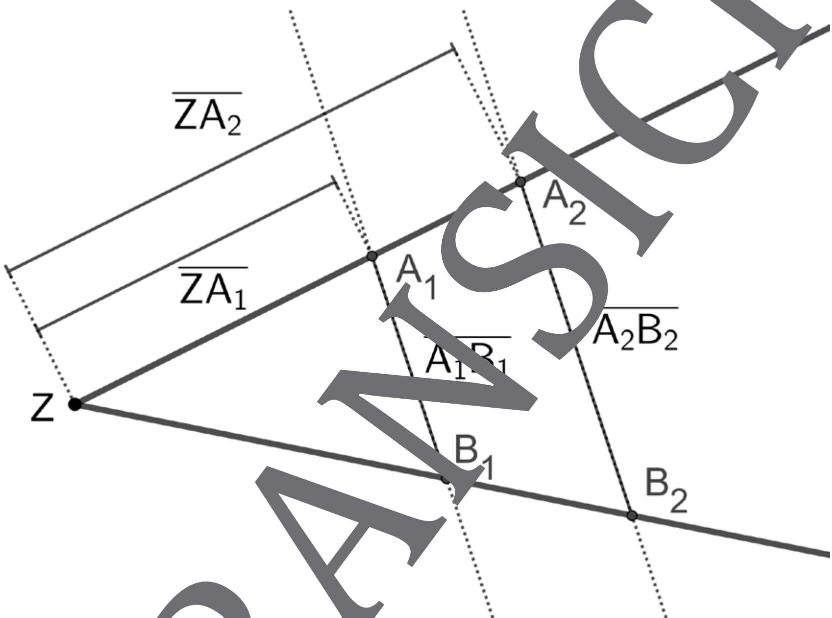
Extremwertaufgaben mit dem Strahlensatz

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Der Strahlensatz ist eine wichtige Aussage der Geometrie, findet in diesem Material jedoch Anwendung im Zusammenhang mit der Analysis. Als Nebenbedingung von Extremwertaufgaben kommt er zum Einsatz, wenn die Schülerinnen und Schüler die maximalen Flächen und Volumina von Objekten berechnen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Übung, Diskussion
Thematische Bereiche:	Strahlensatz, Extremwertaufgabe, Hauptbedingung, Nebenbedingung, Zielfunktion, Differenzieren, Fläche, Volumen

Fachliche Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler sind in der Laage, Funktionen zu differenzieren. Sie können in beschreibenden Texten mathematische Aufgaben erkennen. Sie stellen Haupt- und Nebenbedingung für Extremwertaufgaben auf und bilden eine Zielfunktion, mit der sie den gesuchten Extremwert bestimmen.

Auf einen Blick

Extremwertaufgaben mit dem Strahlensatz

M 1 Erläuterung: 1. und 2. Strahlensatz

M 2 Aufgaben

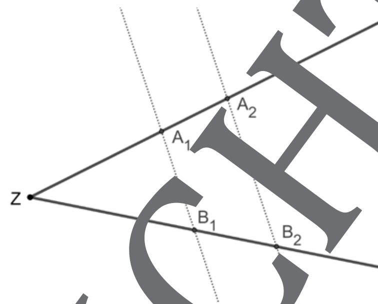
Erklärung zu den Symbolen

leichtes Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Erläuterung: 1. und 2. Strahlensatz

M 1

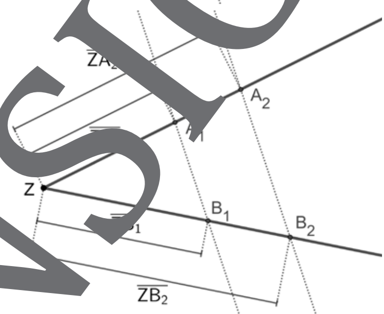
Der Strahlensatz oder Vierstreckensatz ist eine wichtige Aussage in der Geometrie und befasst sich mit dem Längenverhältnis von Strecken.
Man geht von zwei Strahlen aus, die von einem zentralen Punkt Z ausgehen und von zwei parallelen Geraden geschnitten werden. Dabei lassen sich folgende Beobachtungen machen:



1. Strahlensatz

Wenn die Schnittpunkte der parallelen Geraden mit den Strahlen diese in Teilabschnitte unterteilen, so stehen die Teilabschnitte des einen Strahls im gleichen Verhältnis zueinander wie die Teilabschnitte des anderen Strahls.
Es gilt:

$$\overline{ZA_2} : \overline{ZA_1} = \overline{ZB_2} : \overline{ZB_1}$$



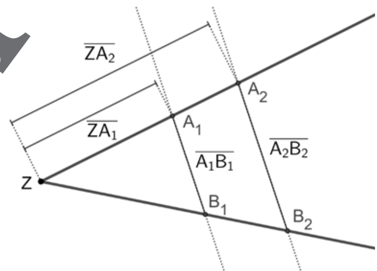
2. Strahlensatz

Die parallelen Strecken zwischen den Schnittpunkten stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die entsprechenden Teilabschnitte auf jedem der beiden Strahlen.
Es gilt:

$$\overline{ZA_2} : \overline{ZA_1} = \overline{A_2B_2} : \overline{A_1B_1}$$

Das lässt sich auch umformen zu:

$$\overline{ZA_2} : \overline{A_2B_2} = \overline{ZA_1} : \overline{A_1B_1}$$



Grafiken: Günter Gerstbrein

Anmerkungen:

- Der Strahlensatz hängt eng mit der zentrischen Streckung zusammen.
- Der Strahlensatz lässt sich auch auf den Fall übertragen, bei dem sich zwei Geraden im Punkt Z schneiden und ihrerseits von zwei parallelen Geraden geschnitten werden, die nicht notwendigerweise auf der gleichen Seite von Z liegen.

M2 Aufgaben

1. Rechteck im rechtwinkligen Dreieck
   Ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten a = 8 cm und b = 12 cm hat einen rechten Winkel bei C. Dem Dreieck wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass je eine Rechteckseite auf den Katheten zu liegen bekommt. Wie sind Länge und Breite des Rechtecks zu wählen, damit dessen Fläche maximal wird?

2. Rechteck im Trapez
   a) Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Seitenlängen a = 6 cm und c = 2 cm und der Höhe h = 4 cm. Dem Trapez wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Seite auf der Trapezseite a und je eine Ecke auf den Trapezschenkeln zu liegen kommt. Bei welcher Länge und bei welcher Breite hat das Rechteck maximalen Flächeninhalt?
   b) Lösen Sie Aufgabe a), wobei es sich nun um ein allgemeines (d. h. nicht gleichschenkliges) Trapez handelt. Gehen Sie davon aus, dass die Winkel der Schenkel zur Seite a maximal 90° betragen.
   Tipp: Erweitern Sie das Trapez zunächst zu einem Dreieck und bestimmen Sie dessen Höhe.

3. Quader in Pyramide
   Eine regelmäßige Pyramide hat ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 10 cm als Grundfläche und die Höhe h = 12 cm. In die Pyramide wird ein Quader gestellt. Der Quader hat eine quadratische Grund- und Deckfläche. Die Ecken der Deckfläche liegen auf den Seitenkanten der Pyramide. Wie müssen die Quadratseiten und die Höhe des Quaders gewählt werden, damit er maximales Volumen besitzt?

4. Zylinder im Kegel
   Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe h = 10 cm und dem Grundkreisradius r = 2 cm ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Volumen möglichst groß sein soll. Wie groß sind Radius und Höhe des Zylinders?