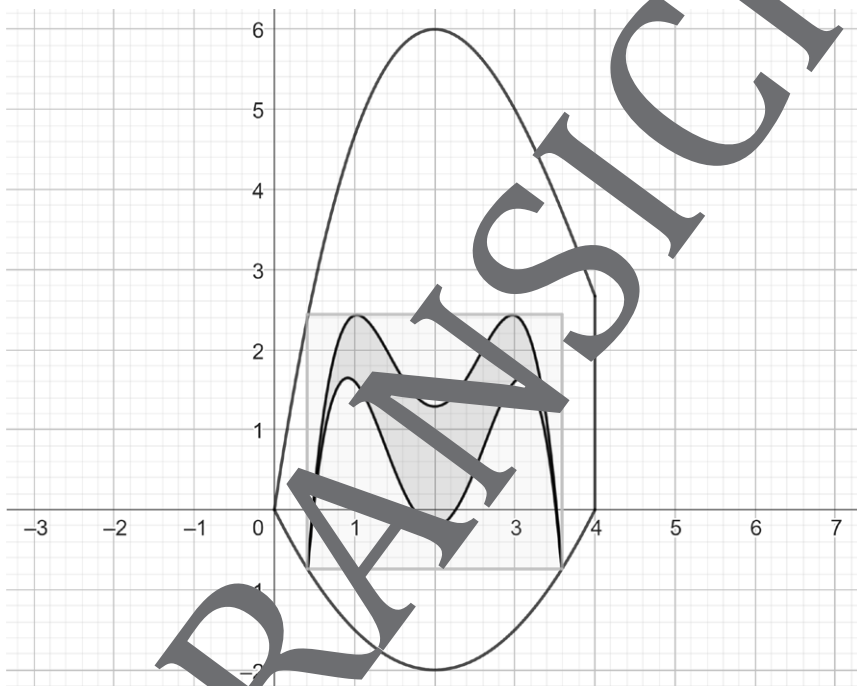


R.1.34

Anwendungsaufgaben – Ganzrationale Funktionen

Ein Firmenlogo aus ganzrationalen Funktionsgraphen

Günther Weber



© RAABE 2025

Grafik: Günther Weber

Auf der Zufahrt zu einer Designfirma steht ein Schild, auf das das Firmenlogo gezeichnet werden soll. Schild und Firmenlogo lassen sich durch ganzrationale Funktionen modellieren. Bei der Zeichnung des Logos auf das Schild müssen die vorhandenen Gegebenheiten und gewisse Bedingungen berücksichtigt werden. Mit den Werkzeugen der Analysis untersuchen Ihre Schülerinnen und Schüler die bestehenden Sachlagen und benutzen sie, damit die gestellten Forderungen erfüllt werden.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	3–4 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
Methoden:	Computer- und Softwareeinsatz, digitale Übung, Übung
Materialart:	GeoGebra-Datei, Grafik
Inhalt:	Ganzrationale Funktionen 3. Grades und 4. Grades, Achsensymmetrie, Null- und Schnittstellen, Produktrechnung, Tangente und Berührungspunkt, Gleichungen von Halogeraden, Lösen von Gleichungssystemen, Schnittstellen, Extremwertproblem, bestimmtes Integral, Transformation von Graphen

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen

Ihre Schülerinnen und Schüler kennen die Eigenschaften von achsensymmetrischen ganzrationalen Funktionen und eine Funktionsuntersuchung bereitet ihnen keine Schwierigkeiten. Die Lernenden wissen, dass die Berechnung des Schnittwinkels von Graphen auf die Berechnung des Schnittwinkels von Tangenten an den Graphen zurückgeführt werden kann. Ihnen ist bekannt, dass die Steigung einer Geraden mithilfe der 1. Ableitungsfunktion bestimmt werden kann, und sie wissen, dass das Produkt der Steigungen zweier Geraden, die senkrecht aufeinanderstehen, gleich -1 ist. Sie können den Abstand zweier Punkte berechnen. Die Jugendlichen können den Funktionsterm von ganzrationalen Funktionen bestimmen („Steckbriefaufgaben“) sowie die Zielfunktion bei einem Extremwertproblem aufstellen. Im Allgemeinen sind die Jugendlichen sicher im Umgang mit ganzrationalen Funktionen und

dazu fähig, diese sowohl zu integrieren als auch zu differenzieren. Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden sicher im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner sind.

Lehrplanbezug

Im Kernlehrplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_23_06_07.pdf

(aufgerufen am 08.11.2023) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen an und deuten die zugehörigen Parameter,
- deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie die Steigung der Tangente an den Graphen,
- bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit einem Exponenten,
- verwenden notwendige und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Außerdem können die Lernenden digitale Werkzeuge nutzen, um die Aufgaben zu veranschaulichen oder ihre Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Vor der Bearbeitung der Aufgaben geben Sie als Lehrkraft noch folgende Hinweise.

Bei **Aufgabe 1a)** weisen Sie darauf hin, dass die Angabe in Metern gesucht ist. Verdeutlichen Sie bei **Aufgabe 1b)** – insbesondere bei schwächeren Lerngruppen anhand der Abbildung – den gesuchten Winkel. Sie erinnern ihre Klasse daran, dass mit der Tangentensteigung der Neigungswinkel der Geraden gegen die x-Achse bestimmt wird. Fordern Sie bei **Aufgabe 1di)** ein, dass **Aufgabe 1c)** beachtet wird und bei **Aufgabe 1diii)** weisen Sie darauf hin, dass der Abstand die minimale Entfernung ist und somit eine Extremwertaufgabe vorliegt. Wiederholen Sie vor der **Aufgabe 2a)** die Eigenschaften einer achsensymmetrischen ganzrationalen Funk-

Aufgaben

M 1

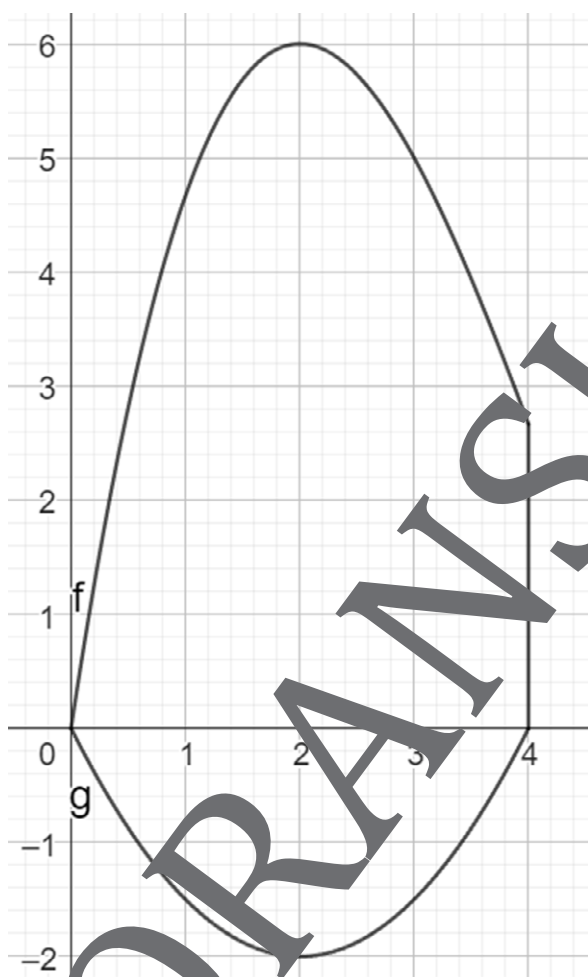
1. In einem geeigneten Koordinatensystem ($1 \text{ LE} \triangleq 2 \text{ dm}$) begrenzen die Graphen der Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{20}{3}x, \quad x \in [0; 4],$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad x \in [0; 4]$$

und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ das Firmenschild, das an der Zufahrt der Design-Firma Meierling steht (siehe Abbildung nächste Seite).

- Zeigen Sie, dass der höchste und tiefste Punkt des Schildes auf einer Geraden p parallel zur y -Achse liegen; geben Sie den Abstand dieser Punkte in Meter an.
 - Bei der Anfertigung des Schildes war die Vorgabe, dass die Winkel, die die obere und die untere Begrenzung des Schildes mit dem rechten Rand einschließen, sich um maximal 10° unterscheiden.
 - Es seien P und Q zwei Punkte auf der oberen Begrenzung des Schildes, die von der Geraden p (siehe Aufgabenteil a) den gleichen Abstand haben. Zeigen Sie, dass die Punkte rechts von der Geraden p immer oberhalb der Punkte links der Geraden liegen.
 - Die Gerade p soll die Symmetrieachse eines Rechtecks sein, das innerhalb des Schildes liegt und dessen oberer linker Punkt P_1 auf der Begrenzungslinie des Schildes liegt. Das Rechteck soll maximalen Flächeninhalt haben.
 - Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks.
 - Zeichnen Sie das Rechteck in der Abbildung auf der nächsten Seite ein.
 - Berechnen Sie den minimalen Abstand des oberen rechten Eckpunktes des Rechtecks vom Graphen der Funktion f in cm.
 - Zusatz: Geben Sie die Koordinaten des Punktes auf dem Graphen der Funktion f an, dem vom Punkt P_1 die minimale Entfernung hat.
 - Berechnen Sie den prozentualen Anteil der maximalen Rechteckfläche an der Fläche des Schildes.
 - Auf dem Schild soll das Logo der Familie Meierling gezeichnet werden. Die Fläche für das Logo soll ein Quadrat mit maximalem Flächeninhalt sein. Das Quadrat hat die Gerade p als Symmetrieachse und der obere linke Punkt des Quadrates liegt auf der linken oberen Begrenzung des Schildes.
 - Bestimmen Sie die Eckpunkte des Quadrates.
 - Zeichnen Sie das Quadrat in die Abbildung auf der nächsten Seite ein.
- (zur Kontrolle: Die Seitenlänge des Quadrates beträgt ca. $3,17 \text{ LE}$.)



Grafik: Günther Weber

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

