

U.27

Ausgewählte Themen

Charakterisierung von Funktionen mittels Funktionalgleichungen

Alfred Müller

(A) $f(x) = x^c, c \in \mathbb{R}$

(B) $f(x) = c \cdot x, c \in \mathbb{R}$

(C) $f(x) = \log_c x, c \in \mathbb{R}$

(D) $f(x) = \cos x$

(E) $f(x) = c^x, c \in \mathbb{R}$



(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(2) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

(3) $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$

(4) $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$

(5) $f(b+a) + f(b-a) = 2 \cdot f(a) \cdot f(b)$

Für die Schülerinnen und Schüler sind die Bedingungen meist direkt angegeben. Sie arbeiten mit einem $f(x)$ und können unmittelbar die Vorschrift ablesen, die jedem Wert x aus einer Definitionsmenge einen bestimmten Wert zuordnet.

Dem gegenüber stehen Funktionalgleichungen, bei denen anhand von Zusammenhängen der Werte die Funktion selbst gefunden werden muss. Welche Funktion könnte beispielsweise die Bedingung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ haben? Mit Aufgaben dieser Art beschäftigen sich die Lernenden in diesem Material.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Kompetenzen:	Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Analyse, Diskussion, Übung
Thematische Bereiche:	Funktion, Funktionalgleichung, Polynom, Logarithmus, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktion, Gleichungen lösen, Funktionalgleichungen lösen

Fachliche Hinweise

Zur Lösung der Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler sich bereits mit den Eigenschaften verschiedener Funktionen auskennen. Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen oder trigonometrische Funktionen sind ihnen bekannt und sie können damit arbeiten.

Auf einen Blick

Charakterisierung von Funktionen mittels Funktionalgleichungen

M 1 Aufgaben mit Funktionalgleichungen

Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.	
	leichtes Niveau	 mittleres Niveau
		 schwieriges Niveau

Aufgaben mit Funktionalgleichungen

M 1

Gleichungen, mit deren Hilfe Funktionen charakterisiert bzw. bestimmt werden können, heißen **Funktionalgleichungen**.

1.

- a) Für welche lineare Funktion $f(x) = mx + t$ gilt:

$$f(x+1) = f(x) + a ?$$



- b) Für welche quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt:

$$f(x+1) = f(-x) ?$$



- c) Welche Polynomfunktionen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ erfüllen die Bedingung

$$f(x+1) - x = f(x) + 1 ?$$



2.

- a) Eine Funktion f mit $f(1) = 2$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Ferner gilt für $a, b \in \mathbb{R}$: $f(x+b) = f(a) \cdot f(b)$

Bestimmen Sie $f(0)$ und $f(-1)$.



- b) Eine Funktion f mit $f(1) = 2$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und es gelten die folgenden beiden Bedingungen:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot f(x) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x+y}\right)$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion $f(x)$.



- c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x$ die folgenden drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

(1) $f(-x) = -f(x)$

(2) $f(x+1) = f(x) + 1$

(3) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$



Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

