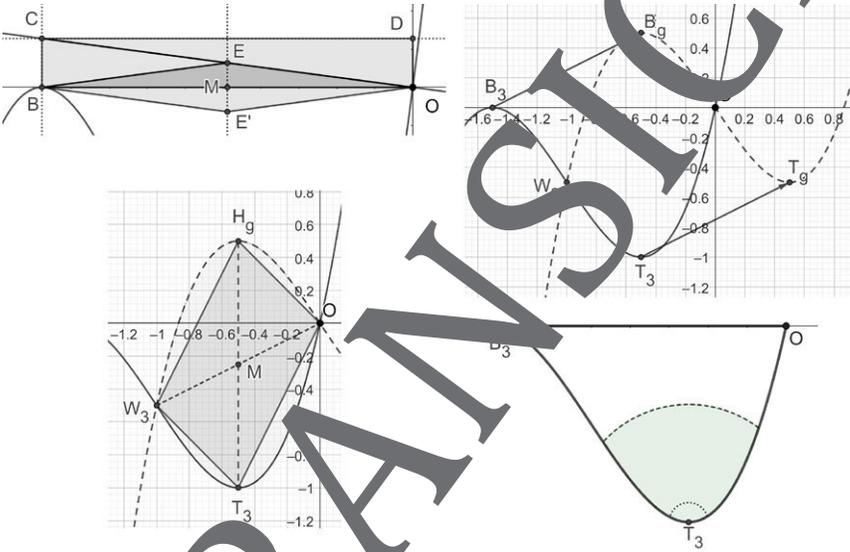


### A.3.39

#### Ganzrationale Funktionen mit Parametern

## Modellierung von Umweltverschmutzung in einem See – Parameterbestimmung bei einer ganzrationalen Funktionenschar

Günther Weber



© RAABE 2025

Grafik: Günther Weber

Die Lernenden stellen durch geeignete Vorgaben den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktionenschar auf. Zu den Graphen der Schar bzw. zur Wendetangente bestimmen sie Parameter sowie der Graphen die Wendetangente oder sonstige Flächen bestimmte Anforderungen erfüllen. Verschiebt man einen Graphen der Schar, so kann die Schnittfläche untersucht werden. Diese Untersuchung wird durch Extremalwertaufgaben erweitert, indem zwischen den Graphen Dreiecke oder Trapeze eingefügt werden, deren Flächeninhalt maximal wird. In der Anwendungsaufgabe bilden der Graph einer Funktion der Schar und die x-Achse eine Teichrinne, die von Wasserlinsen bedeckt wird. Die Bedeckung untersuchen die Jugendlichen mit den Methoden der Analysis.

---

## KOMPETENZPROFIL

<b>Klassenstufe:</b>	10/11/12/13
<b>Dauer:</b>	7–9
<b>Kompetenzen:</b>	Mathematisch argumentieren und beweisen, Mathematische Darstellungen verwenden, Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
<b>Methoden:</b>	Computer- und Softwareeinsatz, Digitale Übung, Übung
<b>Materialart:</b>	GeoGebra-Datei, Grafik
<b>Inhalt:</b>	Ganzrationale Funktionen, Schar 3. Grades, Lineare, Quadratische und Exponentialfunktion, Null-, Berührung und Schnittstellen, Extrem- und Wendepunkte, Punktrechnung, Tangente, Normale, Wendetangente, Asymptote, Transformation von Graphen, Extremwertproblem, bestimmtes Integral

---

## Didaktisch-methodische Hinweise

### Lernvoraussetzungen:

Eine Funktionsuntersuchung, auch bei Funktionen mit Parametern, bereitet Ihren Schülerinnen und Schülern keine Schwierigkeiten und sie können die Gleichungen von Tangenten, Normalen und Wendetangenten einer Schar aufstellen. Die Lernenden wissen, dass die Berechnung des Schnittwinkels von Graphen auf die Berechnung des Schnittwinkels von Tangenten an den Graphen zurückgeführt werden kann. Ihnen ist bekannt, dass die Steigung einer Geraden mithilfe der Ableitungsfunktion bestimmt werden kann und sie wissen, dass das Produkt aus Steigungen zweier Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, gleich  $-1$  ist. Die Jugendlichen können die Zielfunktion bei einem Extremwertproblem aufstellen und Extremwertprobleme auch mit Parametern lösen. Im Allgemeinen sind sie sicher im Umgang mit ganzrationalen Funktionen und dazu fähig, diese sowohl zu integrieren als auch zu differenzieren. Zur Transformation des Graphen von Funktionen können die Lernenden den Funktionssterm der neuen Funktion herleiten.

Vorteil ist es, wenn die Klasse sicher im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner ist und eine Vertiefung der Aufgabenstellungen bzw. Lösungen mithilfe von GeoGebra keine Schwierigkeiten bereitet.

### Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Wiederholen Sie bei leistungsschwächeren Lerngruppen vor der Bearbeitung von **Aufgabe 1)** die Bedeutung einer Berührstelle mit der x-Achse und den Zusammenhang zwischen einer Nullstelle und dem zugehörigen Linearfaktor. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können den Funktionsterm mithilfe der Differenzierungsaufgabe bestimmen. Falls der Begriff der Ortslinie nicht im Unterricht behandelt wurde, wiederholen Sie den Rechenweg zur Bestimmung der Ortslinie. Bei den **Aufgaben 2), 3), 4), 5) und 6)** bei denen der Parameter  $k$  bestimmt werden soll, kann die Lösung vor der Rechnung zur Veranschaulichung experimentell mithilfe von GeoGebra näherungsweise ermittelt werden.

Wiederholen Sie vor der Bearbeitung von **Aufgabe 6a)** wie sich eine Transformation auf den Funktionsterm auswirkt.

Vor der Bearbeitung von **Aufgabe 7)** können Sie den Sachverhalt, dass ein Teich mit Wasserlinsen überzogen ist, z. B. mithilfe des Videos

<https://www.youtube.com/watch?v=fdk1QDw11C0>

(abgerufen am 17.03.2025)

veranschaulichen. Evtl. bietet sich hier auch ein Schülervortrag des Unterrichts mit dem Fach Biologie in der Thematik Fotosynthese an.

### Auf einen Blick

**M 1**                    Aufgaben

**Benötigt:**             Internet

### Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Aufgaben auf mittlerem Niveau.



leichtes Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

## Aufgaben

M 1

1. Die Graphen einer Funktionenschar 3. Grades  $f_k(x)$ ,  $k > 0$  berühren die x-Achse in den Punkten  $B_k\left(-\frac{k}{2} \mid 0\right)$  und schneiden die x-Achse im Ursprung.

Die Graphen verlaufen zudem durch die Punkte  $P_k\left(-\frac{2k}{3} \mid -\frac{k^3}{27}\right)$ .

- a) Begründen Sie, dass zur Bestimmung des Funktionsterms der Ansatz  $f_k(x) = a \cdot x \cdot \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$  verwendet werden kann und bestimmen Sie den Funktionsterm.

Zur Differenzierung: Verwenden Sie zur Bestimmung des Funktionsterms den Ansatz  $f_k(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ ,  $a \neq 0$

Zur Kontrolle:  $f_k(x) = 2 \cdot x^3 + 2k \cdot x^2 + \frac{1}{2}k^2 \cdot x$

- b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Punkte  $T\left(-\frac{k}{6} \mid -\frac{k^3}{27}\right)$  die relativen (lokalen) Tiefpunkte der Schar sind.

- c) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortslinie der Tiefpunkte.

2.

- a) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Schar und die Gleichung der Wendetangenten.

Zwischenergebnis:  $t_w(x) = -\frac{k^2}{6}x - \frac{k^3}{27}$ ,  $k > 0$

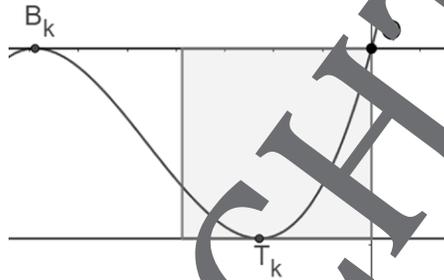
- b) Bestimmen Sie den Parameter der Schar so, dass  
I. die Wendetangente die x-Achse unter einem Winkel von  $60^\circ$  schneidet,  
II. die Normale zur Wendetangente durch den Wendepunkt durch den Ursprung verläuft.

- c) Der Graph der Funktion, die y-Achse und die Wendetangente schließen eine Fläche ein. Überprüfen Sie, ob der Anteil des Flächeninhalts dieser Fläche am Flächeninhalt der Fläche, die die Wendetangente mit den Koordinatenachsen einschließt, unabhängig vom Parameter  $k$  ist. Bestimmen Sie  $k$  so, dass die Fläche einen Flächeninhalt von 0,1 FE hat.

- d) Das von den Wendepunkten, den Tiefpunkten und dem Ursprung gebildete Dreieck ist rechtwinklig.

4.

- a) Zwei Seiten eines Quadrates liegen auf den Koordinatenachsen, eine dritte Seite auf der Parallelen zur x-Achse durch die Tiefpunkte. Bestimmen Sie den Scharparameter  $k$  so, dass der Flächeninhalt des Quadrates mit dem Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Funktion mit der x-Achse einschließt, übereinstimmt. Geben Sie die Seitenlänge und den Flächeninhalt des Quadrates an. Zur Kontrolle:  $k = 756$ .



Grafik: Günther Weber

- b) Der Graph der Funktion schneidet von dem Quadrat zwei Flächen ab. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Flächen.

5. Es sei  $Q(u|f_k(u))$ ,  $-\frac{k}{2} < u < 0$  und  $L(u|0)$  der Schnittpunkt des Lotes von  $Q$  auf die x-Achse. Die Punkte  $Q$ ,  $L$  und der Ursprung  $O$  bilden ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der maximale Flächeninhalt des Dreiecks für  $u = -\frac{k}{2}$  angenommen wird. Bestimmen Sie  $k$  so, dass der maximale Flächeninhalt des Dreiecks  $\frac{250}{625}$  FE beträgt und geben Sie die Eckpunkte dieses Dreiecks an.

6. Der Graph der Funktion  $g(x)$  entsteht durch Transformation des Graphen der Funktion  $f_3$ . Hierbei wird der Graph der Funktion  $f_3$  so verschoben, dass der Wendepunkt von  $f_3$  in den Koordinatenursprung fällt.

- a) Bestimmen Sie den Funktionsform der Funktion  $g$  und geben Sie ohne Berechnung die Koordinaten des relativen Hoch- bzw. Tiefpunkts an. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion in die mit  $g$  beschriftete Abbildung.

Zur Kontrolle:  $g(x) = 2x^3 - 1,5x$ .

# Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.  
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online  
14 Tage lang kostenlos!

[www.raabits.de](http://www.raabits.de)

