

T.1.11

Bausteine der Analysis – Folgen und Reihen

„Können Sie noch folgen?“ – Folgen und Grenzwerte verständlich einführen

Michael Piechatzek



© RAABE 2025

© Andy Falconer / iStock / Getty Images Plus

„Er wird immer kleiner!“, antworten Ihre Schüler wahrscheinlich auf die Frage, was mit einem Mann passiert, wenn er immer weiter geradeaus von uns wegläuft. Kann man dieses „immer kleiner werden“ auch mathematisch ausdrücken? Ja! Man schreibt die Größe des Mannes nach jedem Schritt auf und erhält eine Zahlenfolge. Offenbar nähert sich diese Folge der Zahl 0 – wie genau, das wissen wir noch nicht. Führen Sie den Begriff der Zahlenfolge handlungsorientiert ein. Lassen Sie Ihre Schüler z. B. ein Blatt Papier falten und den Grenzwert dieses Prozesses berechnen. Tip: Karten helfen Ihren Schülern auf die Sprünge.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 10/11

Dauer: 6 Unterrichtsstunden

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, kommunizieren

Methoden: Analyse, Diskussion

Thematische Bereiche: Zahlenfolgen, explizite und rekursive Beschreibung einer Folge, Eigenschaften von Folgen (Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz), Nullfolgen, Leibnizsche Zahl, Grenzwert, Grenzwertsätze für Zahlenfolgen, Grenzwerte von Funktionen, alltagsnahe Beispiele

Fachliche Hinweise

Elementare Termumformungen führen Ihre Schüler souverän durch. Dazu gehören die binomischen Formeln, die Potenz- und Wurzelgesetze sowie das korrekte Ausklammern. Außerdem benötigt man in **M 2**, Aufgabe 2) die **geometrische Reihe**:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k; \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Beispiel: $q = 4: \sum_{k=0}^n 4^k = \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$

Didaktisch-methodische Hinweise

Den Begriff der Folge einführen

Viele alltägliche Problemstellungen lassen sich mithilfe der Mathematik beschreiben. So kann man Folgen nutzen, um etwa den Gang des jungen Mannes auf dem Hütelhof mathematisch zu modellieren.

Lassen Sie die Schüler zunächst überlegen, welche Rolle Zahlenfolgen in ihrem Alltag spielen. Wenn man sich beispielsweise das Jahr über aufgeschrieben hat, welche Noten man in den Tests und Klassenarbeiten hatte, kann man am Jahresende an der Zahlenfolge eine (hoffentlich positive!) Entwicklung ablesen. Bei physikalischen Experimenten notiert man meist **Messreihen** – das sind Folgen, die angeben, welchen Wert eine Messgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt hatte. Folgen können **Wachstums-** und **Dezimierungsprozesse** beschreiben – und zwar in ganz unterschiedlichen Bereichen.

Eine mathematische Fassung des Wortes „Folge“ hilft den Schülern, zu erkennen, dass all diesen Beispielen das gleiche Phänomen zugrunde liegt.

Definition 1:

Eine **Folge** ist eine Abbildung von der Definitionsmenge $\mathbb{N}_0$. Wir verwenden für eine Folge die Bezeichnung:

$$n \mapsto a_n \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

oder kurz (a_n) . Die einzelnen a_n heißen **Folgenglieder**.

Bei den **Grenzwertbetrachtungen** führen Sie einen weiteren abstrakten Begriff ein: „unendlich“ (geschrieben: ∞). Die Schüler lernen, dass unendliche Zahlenfolgen einen Grenzwert haben können.

Ablauf

Der Einstieg in die Thematik erfolgt über alltagsnahe Beispiele. Die Schüler modellieren Folgen zu Sachverhalten und umgekehrt. Handlungsorientiert nähern sich Ihre Schüler dem mathematischen Folgenbegriff. Dazu falten sie einen Bogen Papier, färben Flächen ein und betrachten die Folge der eingefärbten Flächeninhalte (**M 2**). **Tippkarten (M 3)** erleichtern ihnen

die Arbeit und fördern eine selbstständige Auseinandersetzung mit der Problemstellung. Die Lernenden erfahren, wie einzelne Folgenglieder notiert werden. Sie stellen fest, dass ein Glied einen **Nachfolger** hat. Die Schüler müssen weiterhin angeben, ob die betrachtete Folge (**streng**) **monoton wachsend** oder **fallend** ist. Gibt es eine Zahl, der sich die Flächeninhalte nähern? Auch diese Frage schneiden Sie an.

Mit Material **M 4** führen Sie die Begriffe „**Konvergenz**“ und „**Divergenz**“ ein. Neben der leicht zu verstehenden **Nullfolge** ist auch die **Unendlichkeit** Thema dieses Materials. Der **Grenzwert** einer konvergenten Zahlenfolge für $n \rightarrow \infty$ wird definiert. Lassen Sie Ihre Schüler einfache Grenzwerte bestimmen. Material **M 5** ist ein **Tandembogen**, um selbstständig abschließen sich Ihre Schüler mithilfe zweier Lückentexte die Bedeutung der Begriffe **Stellglied**, **Platznummer**, **Rekursivität** und **explizite Notation**. Zusatzaufgaben vertiefen das Verständnis der neu gelernten Wörter.

Material **M 6** befasst sich mit der praktikablen Bestimmung von Grenzwerten. Die Schüler wenden elementare Rechengesetze an, um die gegebenen Terme so umzuformen, dass man den jeweiligen Grenzwert leicht ablesen kann. Mit der Bildung von Nullfolgen innerhalb eines Ausdrucks erlernen Ihre Schüler ein praktisches Mittel, um schnell ans Ziel zu gelangen. Außerdem müssen die Lernenden die **Grenzwertsätze** anwenden. Teilen Sie dazu die **Regelkarten (M 7)** aus. Weitere Übungen vertiefen und festigen den Stoff. Die Expertenaufgaben geben Ihnen eine Möglichkeit, innerhalb dieses Materials zu differenzieren.

Den Abschluss bildet ein Spiel: **Limes-Bingo (M 8)**. In kleinen Gruppen wiederholen die Schüler alle Erkenntnisse aus den vorangegangenen Materialien.

Beim Limes-Bingo führen Sie, aufbauend auf dem Grenzwertbegriff für Folgen, den Grenzwertbegriff für Funktionen ein.

Definition 2:

Eine Zahl g heißt **Grenzwert der Funktion f** für $x \rightarrow +\infty$ (bzw. für $x \rightarrow -\infty$), wenn für jede Bildfolge $(f(x_n))$ mit $x_n \rightarrow +\infty$ (bzw. für $x_n \rightarrow -\infty$) und $x_n \in D_f$ die Bildfolge $(f(x_n))$ den Grenzwert g hat.

Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$

Papier falten – Ein einfaches Experiment zur Konvergenz

M 2

Das Wort „**Folge**“ hat unterschiedliche Bedeutungen:

Zum Beispiel ist eine Folge eine *Konsequenz* aus einer bestimmten Handlung. Wenn man sich nicht an die Regeln, kann eine Strafe folgen. Eine andere Bedeutung des Wortes „Folge“ ist eine *Reihe* von zeitlich aufeinanderfolgenden Dingen oder Geschehnissen.

Was aber ist eine mathematische Folge?

Aufgabe

Nehmen Sie ein weißes DIN-A4-Blatt Papier, legen Sie es quer vor sich auf den Tisch und halbieren Sie es mit einem Bleistiftstrich. Die linke Seite färben Sie mit einem farbigen Stift ein. Die rechte Seite halbieren Sie waagrecht mit einem weiteren Bleistiftstrich. Die obere Hälfte der rechten Seite teilen Sie senkrecht in zwei Teile und färben wieder den linken Teil mit dem farbigen Stift ein. Wiederholen Sie diesen Vorgang in der rechten oberen Ecke, bis Sie 5 Flächen eingefärbt haben (siehe Abbildung).

Welcher Anteil der Ausgangsfläche ist nach 1, 2, 3, 4 und 5 solchen Vorgängen gefärbt? Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Welche Aussage über die Vorgänge können Sie machen? Man findet die Folgenglieder durch sukzessives Einsetzen der natürlichen Zahlen in die Formel

$$a_n = \frac{4^n - 1}{6 \cdot 4^{n-1}}.$$

Begründen Sie, wie man auf die Formel kommt. Gibt es ein „letztes“ Folgenglied?

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

