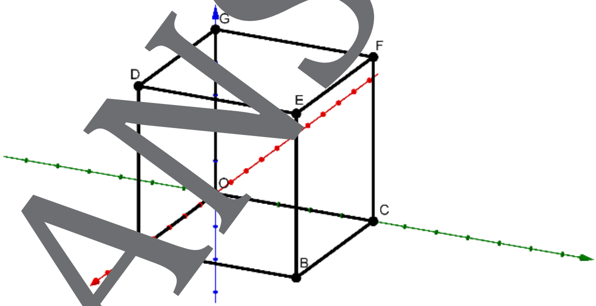
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Anwendung von Skalarprodukt und Vektorprodukt

Rechnen mit Vektoren

RAABE, KLASSE SCHULE

Anwendung von Skalarprodukt und Vektorprodukt

1. a) Berechne das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ und den Winkel ω zwischen den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 4 \\ x_2 \end{pmatrix}$, die auf den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

und $\vec{z} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie jeweils

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$

(2) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}$

(3) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$

b) Überprüfen Sie, ob stets gilt: $\vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}$

3. a) Welches besondere Dreieck ABC bilden die Punkte
   A(5 | 1 | 3), B(3 | 3 | 3) und C(3 | 1 | 5)?

   b) Welches besondere Viereck ABCD bilden die Punkte
   A(2 | - 4 | 3), B(- 3 | - 1 | - 1),
   C(2 | 2 | - 5) und D(7 | - 1 | - 1)?

4. Für zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt:
   $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b}, |\vec{x}| = \sqrt{37}, |\vec{y}| = \sqrt{28}$ und $\vec{x}\circ\vec{y} = -8$.
   Bestimmen Sie daraus $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ und $\varepsilon_1 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

5. Die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ y_3 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht
   auf dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}$.
   Welchen Winkel ε_2 schließen die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ein?

6. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf.
   Für einen Vektor $\vec{x}$ gilt: $\vec{a}\circ\vec{x} = 0 \wedge \vec{b}\circ\vec{x} = 0 \wedge \vec{x}\circ\vec{x} = 16$
   Ist der Vektor $\vec{x}$ eindeutig bestimmt?

7. a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ mit $|\vec{a}| = |\vec{b}| \wedge \vec{a} \perp \vec{b}$.

   Bestimmen Sie k ∈ ℝ so, dass die Vektoren $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ und $\vec{d} = 4\vec{a} + k \cdot \vec{b}$ senkrecht zueinander sind.

   b) Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt:
   $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ und $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$. Bestimmen Sie k ∈ ℝ so, dass die Vektoren $\vec{x} = k \cdot a + 5\vec{b}$ und $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

   c) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ mit $|\vec{a}|$ [illegible] $\wedge\ \vec{a} \perp$ [illegible]

   Welcher Zusammenhang muss zwischen den Zahlen k, m ∈ ℝ bestehen, damit die Vektoren $\vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{b}$ und $\vec{y} = \vec{b} + m \cdot \vec{a}$ senkrecht aufeinander stehen?

8. $\vec{a}^0, \vec{b}^0, \vec{c}^0$ sind Einheitsvektoren, die paarweise einen Winkel von 60° einschließen. Berechnen Sie $|\vec{x}| = |\vec{a}$ [illegible] $\vec{c}^0|$.

9. Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = 2 \wedge \vec{a} \circ \vec{b} = 2 \wedge |\vec{a}| = 2$. Bestimmen Sie den Winkel $\varepsilon_3 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und den Betrag $|\vec{b}|$ des Vektors $\vec{b}$.

10. Die Punkte A(2 | 4 | [illegible]), B(5 | 4 | -1) und C(4 | 8 | -2) bilden die Grundfläche ABC einer [illegible]seitigen Pyramide ABCS mit der Spitze S(4 – a | [illegible]3a | 4 + 5a).

    Bestimmen Sie a so, dass für das Volumen der Pyramide V_P = 11 VE gilt.