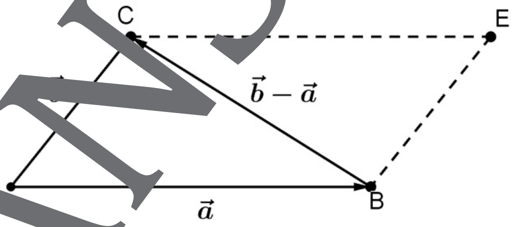
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Das Vektorprodukt und seine Anwendungen

Vertiefendes Übungsmaterial

RAABE

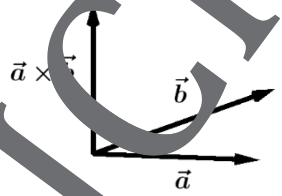
KLASSE SCHULE

Das Vektorprodukt und seine Anwendungen

1. Theorie des Vektorprodukts

1.1 Definition des Vektorprodukts

Unter dem **Vektorprodukt** $\vec{a}\times\vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man denjenigen Vektor $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und dessen Betrag mit dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms übereinstimmt. Dabei bilden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ ein Rechtssystem.



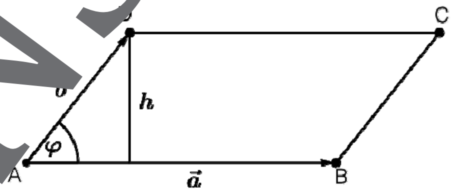
In der Definition sind direkt angesprochen:

(1) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{a}=0 \wedge \left(a\times b\right)\circ\vec{b}=0$

(2) Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$A_P = |\vec{a}|\cdot|\vec{h}|$ mit $|\vec{h}| = |\vec{b}|\cdot\sin\varphi$

$A_P = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$



Aus der Definition können folgende Eigenschaften des Vektorprodukts entnommen werden.

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

2. $\vec{0}\times\vec{0}=\vec{0}$, da der Betrag den Wert 0 besitzt.

3. $(k\cdot\vec{a})\times\vec{b}=k\cdot\left(\overrightarrow{a\times b}\right)$

4. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ linear abhängig, d. h. parallel (Folgerung aus 2. und 3.)

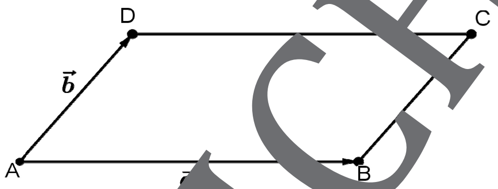
5. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

2. Anwendungen des Vektorprodukts

2.1 **Flächenberechnungen**

(I) Fläche eines Parallelogramms

Ein Parallelogramm ABCD wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ aufgespannt (siehe nebenstehende Skizze).



Aus der Definition des Vektorprodukts gilt dann:

$$\mathbf{A_P} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$$

<u>Beispiele</u>

1. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms

   Lösung:

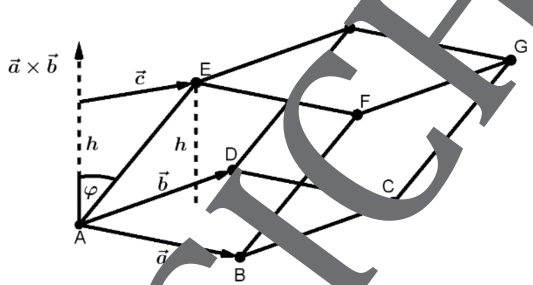
   $$A_P = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8-4 \\ -2+8 \\ -8-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = 6\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 6\cdot 3 = 18 \text{ FE}$$

   Wegen $\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4-8+4 = 0$ stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander, d. h. das Parallelogramm ist ein Rechteck.

Volumenberechnungen

(1) Volumen eines Spats

Ein **Spat** oder **Parallelflach** ist ein gescherter Quader, d. h. die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, die den Spat aufspannen, stehen nicht notwendig senkrecht aufeinander wie beim Quader (siehe nebenstehende Skizze).



Für das Volumen eines Spats gilt: $V_{Sp} = G \cdot h$. Die Grundfläche G des Spats ist ein Parallelogramm, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird, d. h. $G = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Für die Berechnung der Höhe h benötigt man den Winkel φ, den die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c}$ miteinander einschließen.

Es gilt: $\frac{h}{\left|\vec{c}\right|} = \cos\varphi \Rightarrow h = \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\varphi$ mit

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} \Rightarrow h = \left|\vec{c}\right| \cdot \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} = \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$$

Damit erhält man:

$$V_{Sp} = G \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}$$

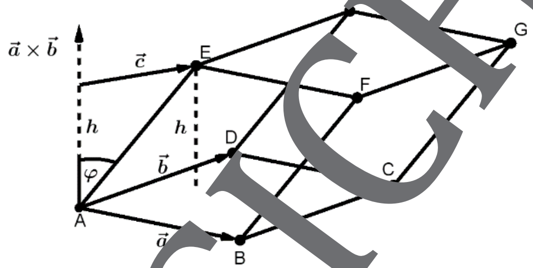
$$\Rightarrow \mathbf{V_{Sp}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \circ \vec{c}$$

Dieser Ausdruck heißt **Spatprodukt**. Es verbindet zur Berechnung des Volumen eines Spats Vektorprodukt und Skalarprodukt.

Volumenberechnungen

(1) Volumen eines Spats

Ein **Spat** oder **Parallelflach** ist ein gescherter Quader, d. h. die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, die den Spat aufspannen, stehen nicht notwendig senkrecht aufeinander wie beim Quader (siehe nebenstehende Skizze).



Für das Volumen eines Spats gilt: $V_{Sp} = G \cdot h$. Die Grundfläche G des Spats ist ein Parallelogramm, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird, d. h. G = $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Für die Berechnung der Höhe h benötigt man den Winkel φ, den die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c}$ miteinander einschließen.

Es gilt: $\frac{h}{\left|\vec{c}\right|} = \cos\varphi \Rightarrow h = \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\varphi$ mit

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} \Rightarrow h = \left|\vec{c}\right| \cdot \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} = \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$$

Damit erhält man:

$$V_{Sp} = G \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V_{Sp}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \circ \vec{c}$$

Dieser Ausdruck heißt **Spatprodukt**. Es verbindet zur Berechnung des Volumen eines Spats Vektorprodukt und Skalarprodukt.