

UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie



Parabeln und Kreise beim Weihnachtsbaum

Tannenbaumspitze

VORANSICHT

Parabeln und Kreise beim Weihnachtsbaum

Die Firma Voss – die Blechprofis – möchte als kleines Geschenk für Kunden und Bekannte für die Adventzeit einen kleinen Tannenbaum aus 3 mm dickem Edelstahlblech anfertigen. Als Vorlage nimmt sie folgenden Tannenbaum.

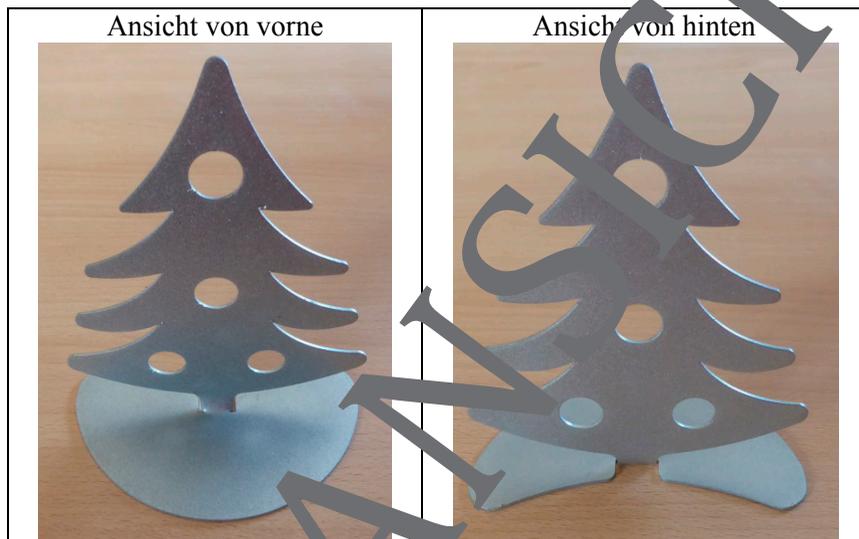


Foto: Günther Weber

Foto: Günther Weber

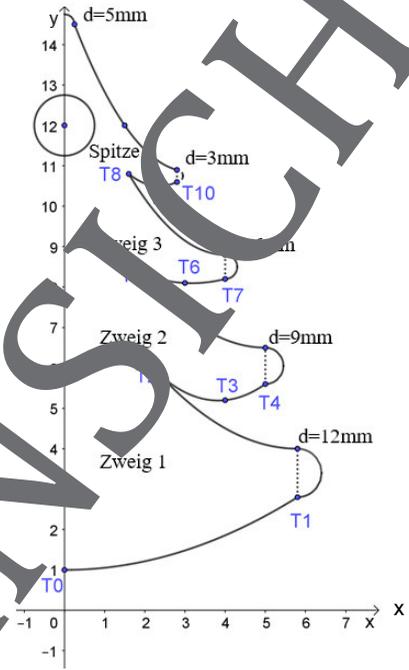
Die Fertigung geschieht indem die Form für den Fuß, den Stamm des Baumes und die Zweige sowie die auszuscheidenden Kreise aus einem Stück Blech gelasert werden. Anschließend werden der Stamm und die Zweige in einem 90° Winkel zum Fuß gebogen. Der Fuß, der Stamm und die Zweige haben insgesamt eine Höhe von $14,75\text{ cm}$, die Zweige fangen in einer Höhe von 1 cm an. Aus dem Baum sind Kreise mit dem Radius $7,5\text{ mm}$ ausgeschnitten.

Vor dem Lasern muss die Maschine so programmiert werden, dass das Blech entsprechend der Form ausgeschnitten wird. Das Ausschneiden kann z.B. entlang des Graphen einer Funktion geschehen.

1. Überlegen Sie, durch welche Graphen die Zweige ausgeschnitten werden können.

Der Laser arbeitet besonders schnell, wenn die Graphen Parabeln oder Kreise sind. Daher entwirft der Techniker für das Lasern ein Programm, sodass die Schnittkanten aus Parabeln und Kreisen bestehen. Liegt der Grundriss der Zweige symmetrisch zur y-Achse in einem ebenen Koordinatensystem (1 LE = 1 cm), so sieht die rechte Hälfte der Zweige im Entwurf wie in der nebenstehenden Abbildung aus. In diesem Koordinatensystem haben die Mittelpunkte der Kreise folgende Koordinaten:
unterer rechter Kreis
M1 (2,2 | 2,5), mittlerer Kreis
M2 (0 | 7,5) und oberer Kreis
M3 (0 | 12). Die einzelnen Zweige bzw. die Spitze bestehen jeweils aus Parabelstücken, die durch einen Halbkreis miteinander verbunden sind.

Der Durchmesser der Halbkreise liegt parallel zur y-Achse.



4. a) Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Höhe des Baumes beim Schatten verändert.
- b) Überprüfen Sie, ob die Punkte T2, T5 und T8 auf einer Geraden liegen und bestimmen Sie gegebenenfalls die Geradengleichung. Überprüfen Sie, ob die „Schattenpunkte“ auch auf einer Geraden liegen und geben Sie auch hier gegebenenfalls die Gleichung der Geraden an.
- c) Der Punkt T5 teilt die Strecke $\overline{T2T8}$. Bestimmen Sie das Teilungsverhältnis und überprüfen Sie, ob das Teilungsverhältnis bei der Schattenbildung erhalten bleibt.
5. Der linke untere Kreis ist das Spiegelbild des unteren rechten Kreises. Die Mittelpunkte der unteren und der Mittelpunkt des oberen Kreises bilden ein Dreieck.
- a) Überprüfen Sie, ob der Schwerpunkt des Dreiecks innerhalb des mittleren Kreises liegt.
- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks und des Schattendreiecks. Bestimmen Sie um wieviel Prozent sich der Flächeninhalt beim Schatten verändert.
- c) Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks und des Schattendreiecks und geben Sie an, ob die Form des Dreiecks bei der Schattenbildung erhalten bleibt.
- d) Die Lichtquelle soll innerhalb der Ebene $x = 30$ verschoben werden. Überprüfen Sie, ob es eine Position der Lichtquelle gibt, sodass das Schattendreieck gleichseitig ist.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: Vermutungen äußern; Ergebnisse vorstellen
- Problemlösen: vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: GTR/CAS (Geogebra)
- Methode: Einzel-/Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Scheitelpunktform und Normalform der Parabelgleichung, Kreisgleichung, Definitionsbereich, Spiegelung an der y-Achse, Zentralprojektion, Zweipunktform der Geradengleichung, Teilungsverhältnis, Schwerpunkt im Dreieck, Winkel im Dreieck, Prozentrechnung

Autor: Günther Weber

Methodisch – didaktische Hinweise

Die Gesamtaufgabe kann in die Aufgaben 1 und 2 sowie in die Aufgaben 3, 4 und 5 getrennt werden, sodass die Aufgaben 1 und 2 auch separat in der Analysis ohne Kenntnisse aus der Analytischen Geometrie behandelt werden können.

Die Berechnung der Parabelgleichungen bzw. Halbkreisgleichungen bei den einzelnen Zweigen kann auf 3 Gruppen aufgeteilt werden; die Ergebnisse werden dann anschließend zusammengetragen.

Je nach Leistungsstärke können die Koordinaten der fehlenden Scheitelpunkte der Zweige bzw. die Koordinaten der weiteren Punkte bei der Spitze vor der Berechnung im Unterrichtsgespräch ermittelt werden.

Ebenfalls ist es günstig, bei der Berechnung noch einmal die Eigenschaft der Achsensymmetrie (bzgl. der y-Achse), die allgemeine Form der Parabelgleichung und die Scheitelpunktform der Parabelgleichung zu wiederholen. Wiederholt werden oder evtl. auch angegeben werden muss die Kreisgleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Diese können jedoch auch als Hilfe ausgelegt werden.

Beim Zusammentragen der Ergebnisse kann der Baum mithilfe eines Geometrieprogramms zeitgleich über Beamer projiziert oder auf einem Whiteboard dargestellt mitgezeichnet werden, sodass auch sofort die Richtigkeit der Ergebnisse zu sehen ist.