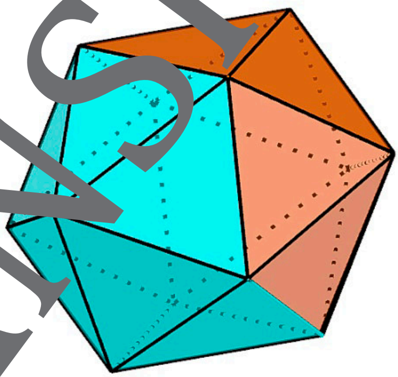
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Platonische Körper – Einführung und Berechnungen

Spezielle geometrische Körper im Fokus

RAABE KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: S[illegible] Orth[illegible]
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Bildnachweis Titel: Dr. Jürgen Leitz

Platonische Körper - Einführung und Berechnungen

Platonische Körper (Platon, griech. Philosoph, 427–347 v. Chr.) sind vollkommen **regelmäßige Polyeder**. Sie sind dreidimensionale Körper, die von kongruenten Polygonen (Vielecken) als Seitenflächen begrenzt werden.
Es gibt **genau fünf** Arten Platonischer Körper:
Tetraeder, Hexaeder (Würfel, Kubus), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Ihr Name setzt sich aus einem griechischen Präfix für die Anzahl der Seitenflächen und der Silbe **„–eder„** (Seite) zusammen:
1 mono… 4 tetra… 6 hexa… 8 okta… 12 dodeka… 20 ikosa…

Grundlegende Eigenschaften
Die Oberfläche setzt sich aus Polyedern (Vielflächner) mit folgenden Eigenschaften zusammen:

- Die begrenzenden Vielecke sind regelmäßig.
- Alle Kanten sind gleich lang.
- Begrenzungsflächen sind jeweils untereinander gleichseitig, gleichwinklig und somit zueinander kongruent.
- Alle Eckpunkte haben denselben Abstand vom Mittelpunkt (Schwerpunkt).
- Wegen der Symmetrie von Ecken, Kanten und Flächen gibt es für jeden Platonischen Körper
  (1) eine **Umkugel**, die durch alle Eckpunkte geht,
  (2) eine **Inkugel**, die alle Seitenflächen berührt und
  (3) eine **Kantenkugel**, die alle Kanten berührt.
- Der gemeinsame Mittelpunkt dieser drei Kugeln ist auch der Mittelpunkt (Schwerpunkt) des Platonischen Körpers.

- Verbindet man beispielsweise benachbarte Seitenmitten (Schwerpunkte) eines Platonischen Körpers, dann entsteht im Innern wiederum ein Platonischer Körper mit demselben Mittelpunkt. Wenn diese Beziehung zwischen zwei Platonischen Körpern umkehrbar ist, dann wird diese Eigenschaft **Dualität** genannt.
  So ist das Hexaeder dual zum Oktaeder (und umgekehrt).

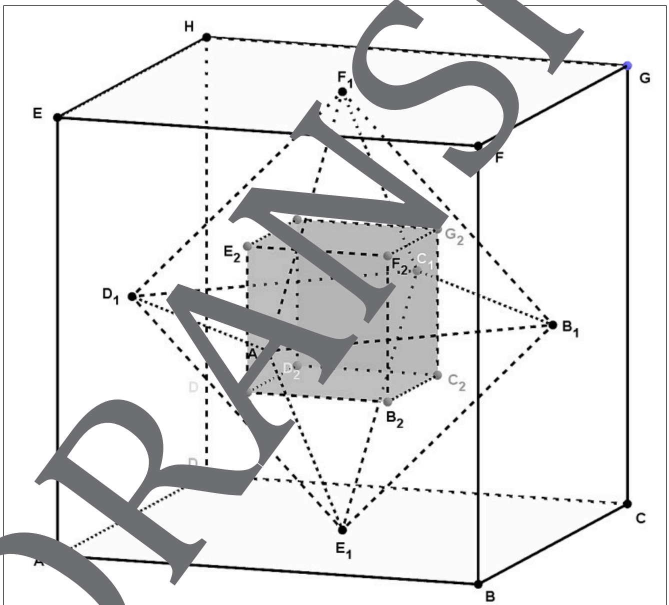
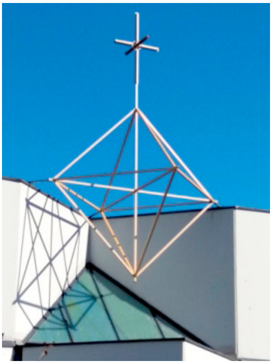


Abb. 1

Platonische Körper im Alltag und in der Natur



Kirchkreuz auf Oktaeder in Bochum

Aussichtsturm in Bottrop

Die Regelmäßigkeit und die Gesetzmäßigkeit des Aufbaus der Platonischen Körper machen diese auf vielerlei Weise für den Menschen interessant. So finden wir sie im Alltag u. a. als Bauwerke (s. Bilder oben), als Schmuckgegenstände, als Kunstwerke und als Bausteine in der Chemie wieder.

Weiterführende Links finden Sie u. a. hier:

Platonische Körper (allgemein)

- https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper
- rmg.zum.de/wiki/Benutzer:Thamm_Pascal/Platonische_K%C3%B6rper/Lernpfad_... 9.Kl... Natur-Umwelt

Bauwerke

- http://rmg.zum.de/wiki/Datei:Tetraeder_bottrop_2004.jpg
- http://rmg.zum.de/wiki/Datei:Schwarzenacker_Pentagondodekaeder.jpg
- http://www.ar...eau.de/3770.htm

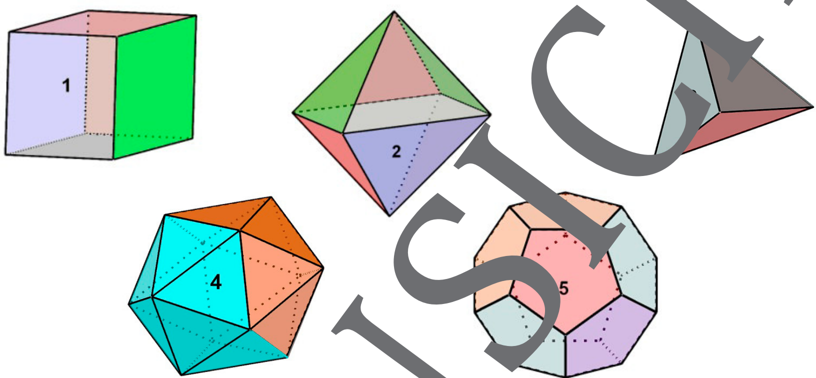
Kunst, Schmuck, Chemie

- http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/platon/lu/kunst_frameset.htm
- https://www.pranahaus.de/shop/platonische-koerper-bergkristall-gross-15665?karussell=dt_product
- http://http://rmg.zum.de/wiki/Datei:Quarzstruktur_SiO4-Tetraeder.svg

Grundlegende Aufgaben

Hinweis: Lösen Sie die Aufgaben mithilfe der Infokarten.

1. Gegeben sind die folgenden Körper:



a) Geben Sie den Namen dieser Platonischen Körper an.

b) Tragen Sie ihre Namen entsprechend der Anzahl der Seitenflächen (in aufsteigender Form) in die nachfolgende Tabelle ein und vervollständigen Sie die Tabelle.

Plat. Körper / Eigenschaft	______-eder	______-eder	______-eder	______-eder	______-eder
Seitenflächen					
Ecken					
Kanten					
Flächenart					
Kanten/Flächen an einer Ecke					

c) Stimmen die Anzahl der Flächen (Ecken) eines Platonischen Körpers P_1 mit der Anzahl der Ecken (Flächen) des anderen Körpers P_2 überein, dann bilden diese beiden zueinander ein **duales** Pärchen. Es gibt genau zwei solcher dualen Paare Platonischer Körper. Ein Platonischer Körper ist zu sich selbst dual.
Welche Platonischen Körper haben diese Eigenschaft?

d) Leonard Euler (1707-1783) fand einen Zusammenhang zwischen den Ecken E, den Flächen F und den Kanten K (Polyedersatz von Euler). Geben Sie den Polyedersatz in Form einer Gleichung an.
Hinweis: Betrachten Sie die ausgefüllte Tabelle. Auf beiden Seiten der Gleichung steht eine Summe.

e) Für ein Tetraeder gibt es zwei verschiedene Körpernetze. Zeichnen Sie diese beiden Netze für ein Tetraeder mit der Kantenlänge a = 5,00 m im Maßstab 1 : 100.

f) Falten Sie eines der in Teilaufgabe e) gezeichneten Körpernetze zu einem Tetraeder. Ergänzen Sie das andere Netz durch vier gleichseitige Dreiecke. Dadurch erhalten Sie das Körpernetz eines Oktaeders. Falten Sie auch dieses Körpernetz.
Hinweis: Fügen Sie vor dem Ausschneiden Klebeflächen hinzu.

Weiterführende Aufgaben

1. Mit zwei oder mehr als zwei Platonischen Körpern können neue zusammengesetzte Körper entstehen (s. Abb. 2 und 3). Die Oberfläche der hier dargestellten Körper setzt sich aus gleichseitigen Dreiecken zusammen.

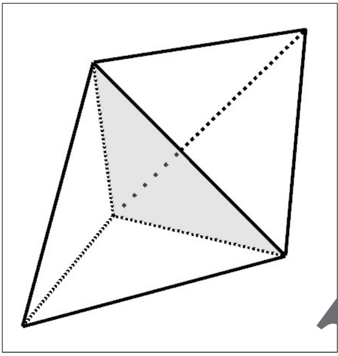


Abb. 2 (Körper 1)

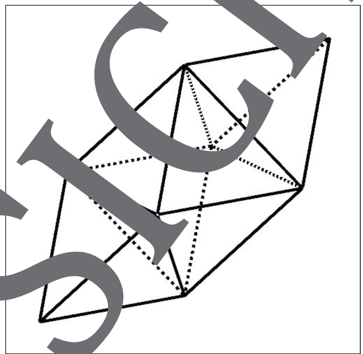


Abb. 3 (Körper 2)

   a) Welcher Art sind die begrenzenden Flächen der Oberfläche?

   b) Aus welchen Platonischen Körpern bestehen die abgebildeten zusammengesetzten Körper?

   c) Entscheiden Sie kurz begründend, ob die dargestellten Körper Platonische Körper sind.

   d) Geben Sie **eine** Gleichung zur Berechnung der Oberfläche für beide Körper in Abhängigkeit von der Körperkante a an.

   e) Bestimmen Sie **eine** Gleichung zur Berechnung des Volumens für beide Körper in Abhängigkeit von der Körperkante a.
   Hinweis: Verwenden Sie die Formelsammlung*.

* Die Formelsammlung befindet sich im Archiv: https://archiv.raabe.de/mathe-geometrie/

3. a) Für das Oktaeder aus Aufgabe 2 sind mithilfe der Vektorrechnung zu bestimmen:
(1) Mittelpunkt (Schwerpunkt) S
(2) Umkugelradius R_U
(3) Inkugelradius R_I
(4) Kantenkugelradius R_K

b) Zeigen Sie, dass für die Radien von In- und Umkugel

(1) beim Tetraeder $R_I = \frac{1}{3} \cdot R_U$ und

(2) beim Oktaeder $R_U = \sqrt{3} \cdot R_I$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Formelsammlung und formen Sie die Gleichungen für die Radien entsprechend um.

Zusatzaufgabe: Stellen Sie das Oktaeder und seine Inkugel mithilfe des Programms **GeoGebra** dar.

4. Eine Lehrmittelfirma stellt für Schulen u. a. Modelle Platonischer Körper aus Holz her. Die Fertigung erfolgt aus Rohlingen, die entweder die Form eines Würfels oder eines Quaders mit einer quadratischen Grundfläche haben. In Abhängigkeit vom jeweiligen Körper hat der Tischler die entsprechenden Schnittwinkel zu bestimmen.
Bei der Wahl des Rohlings sind insbesondere zwei Aspekte zu beachten: Möglichst wenig Abfall und unkomplizierte Herstellung.
Für eine Schule sind ein Oktaeder und ein Tetraeder mit der Kantenlänge $a = 14,0$ cm herzustellen.

a) Entscheiden Sie begründet, bei welchem Rohling (Würfel oder Quader) weniger Abfall für die Herstellung des Oktaeders anfällt.

b) Geben Sie die Abmessungen des zu verwendenden Rohlings an.

c) Zur mathematischen Modellierung wird der Rohling in einem kartesischen Koordinatensystem, bei dem die x_2-Achse nach hinten zeigt, mit dem Eckpunkt $A(0|0|0)$ dargestellt. Die Eckpunkte B und D liegen jeweils auf dem positiven Abschnitt der beiden anderen Achsen und in derselben Ebene wie der Eckpunkt A. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Rohlings und des Oktaeders.

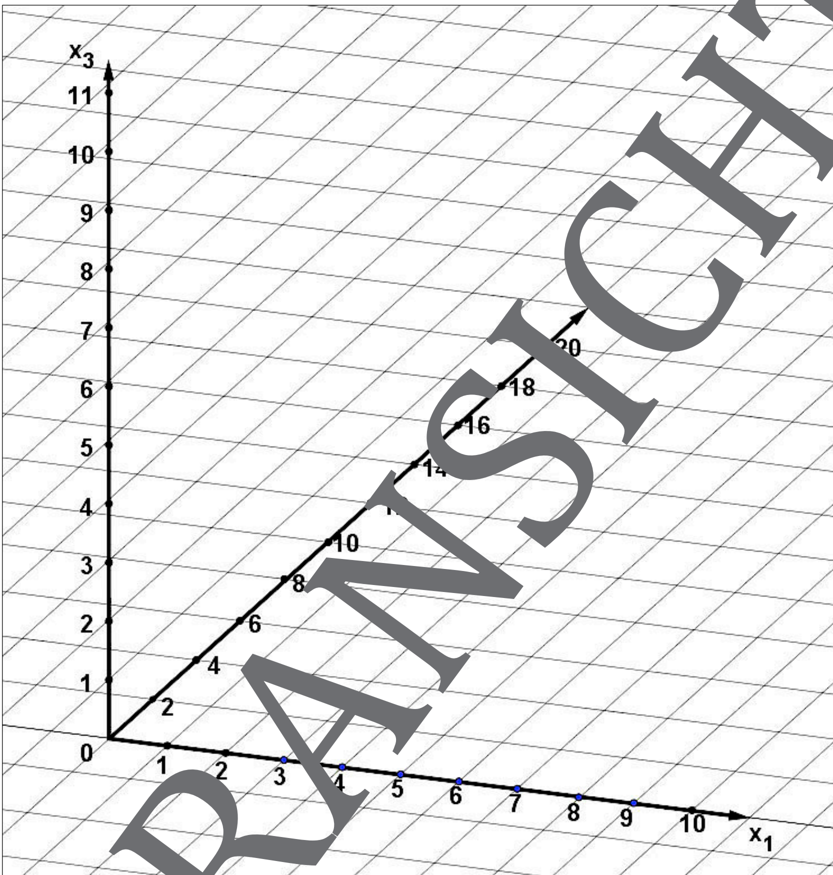
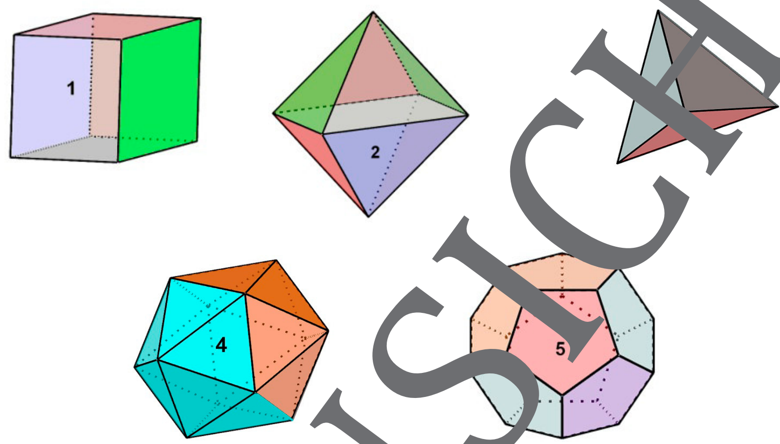


Abb. 4

Platonische Körper



1 Hexaeder, 2 Oktaede[illegible] Ikosaeder, 5 Dodekaeder

Platonische Körper als Bauwerke

Kirchenkreuz auf Oktaeder in Bochum

Aussichtsturm in Bottrop

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend, grundlegend
- Fachlicher Bezug: Mathematik
- Kommunikation: Begründen, argumentieren, vergleichen
- Problemlösen: Darstellungen verwenden, Probleme erkunden, Lösungen berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Modellierung: –
- Medien: Folie
- Methode: Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Länge, Abstand Punkt/Punkt, Abstand Ebene/Ebene, Mittelpunkt, Schwerpunkt, Schnittwinkel, Schnitt Gerade/Gerade, lineares Gleichungssystem (LGS), gleichseitiges Dreieck, regelmäßige Polyeder, Hexaeder, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Platonische Körper, Dualität bei Platonischen Körpern, Oberfläche, Körpernetz, Um-, In- und Kantenkugel

Autor: Dr. Jürgen Leitz

Lösung der grundlegenden Aufgaben

1.a) 1 Hexaeder, 2 Oktaeder, 3 Tetraeder, 4 Ikosaeder, 5 Dodekaeder

b)

Plat. Körper / Eigenschaft	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Seitenflächen	4	6	8	12	20
Ecken	4	8	6	20	12
Kanten	6	12	12	30	30
Flächenart	gleichseitige Dreiecke	Quadrate	gleichseitige Dreiecke	regelmäßige Fünfecke	gleichseitige Dreiecke
Kanten/Flächen an einer Ecke	3	3	4	5	3

c) Hexaeder und Oktaeder sowie Dodekaeder und Ikosaeder bilden jeweils ein duales Paar. Das Tetraeder ist zu sich selbst dual.

d) Es gilt: E + F = K + 2

e) Die beiden Körpernetze für das Tetraeder sehen wie folgt aus:

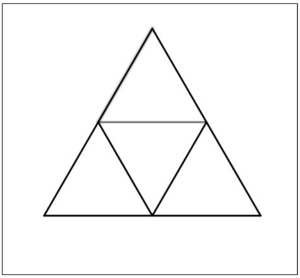


Abb. 7 Netz 1 Tetraeder

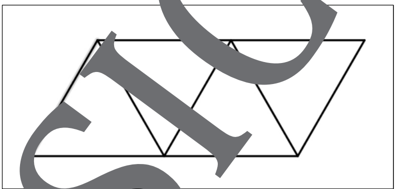


Abb. 8 Netz 2 Tetraeder

f) Es gibt mehrere Möglichkeiten für das Netz eines Oktaeders.

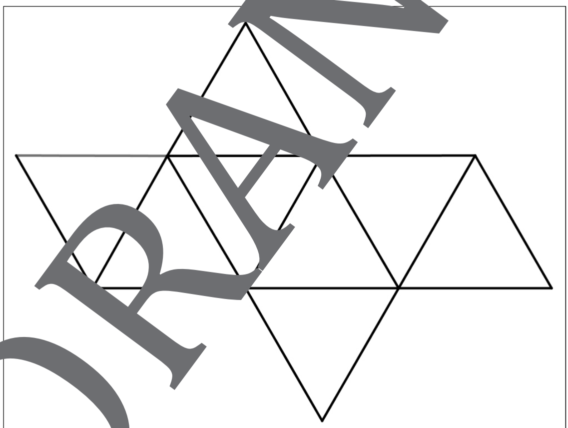


Abb. 9 Netz Oktaeder

Lösung der weiterführenden Aufgaben

1. a) Die Oberfläche der hier dargestellten Körper setzt sich aus gleichseitigen Dreiecken zusammen.

   b) In Abb. 2 ist eine regelmäßige dreiseitige Doppelpyramide, die aus zwei Tetraedern besteht, dargestellt. Der in Abb. 3 dargestellte Körper setzt sich aus einem Oktaeder und zwei Tetraedern zusammen.

   c) Keiner der dargestellten Köper ist ein Platonischer Körper.
   Begründung: Beide Körper werden zwar von gleichseitigen Dreiecken begrenzt, aber **nicht** an jeder Körperecke ist die **gleiche** Anzahl von Kanten und Flächen vorhanden.
   In Abb. 2 haben die drei Körperecken in der Mittelebene jeweils vier Kanten/Flächen und die beiden anderen Eckpunkte nur drei Kanten/Flächen. Da die Anzahl der Kanten **nicht** bei **allen** Eckpunkten des Körpers **gleich** der Anzahl der Flächen ist, ist der in Abb. 2 dargestellte Körper kein Platonischer Körper.
   Analog ist bei dem in Abb. 3 dargestellten Körper **nicht** bei allen Körperecken die Anzahl der Kanten und Flächen gleich. An den Körperecken des Oktaeders treffen vier Kanten/Flächen zusammen und bei zwei Ecken der beiden Tetraeder sind es jeweils drei Kanten/Flächen. Damit ist die Anzahl der Kanten **nicht** bei **allen** Eckpunkten des Körpers **gleich** der Anzahl der Flächen, und der in Abb. 3 dargestellte Körper ist kein Platonischer Körper.

   d) Die Oberfläche vom Körper 1 wird durch sechs gleichseitige Dreiecke bestimmt. Damit gilt

   $$A_{O_1} = 6\cdot\left(\frac{a\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}}{2}\right) = 6\cdot\left(\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\cdot a^2\cdot\sqrt{3}$$

   Die Oberfläche vom Körper 2 setzt sich aus insgesamt 12 gleichseitigen Dreiecken zusammen. Somit gilt:

   $$A_{O_2} = 12\cdot\left(\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}\right) = 3\cdot a^2\cdot\sqrt{3}$$

e) Körper 1 hat das doppelte Volumen eines Tetraeders, also

$$V_1 = 2 \cdot \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2} = \frac{a^3}{6} \cdot \sqrt{2}$$

Für Körper 2 gilt: $V_2 = V_{Oktaeder} + 2 \cdot V_{Tetraeder}$, also

$$V_2 = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2} = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2} + \frac{a^3}{6} \cdot \sqrt{2} = \frac{2 \cdot a^3}{6} \cdot \sqrt{2} + \frac{a^3}{6} \cdot \sqrt{2}$$

$$V_2 = \frac{3}{6} \cdot a^3 \cdot \sqrt{2} = \frac{a^3}{2} \cdot \sqrt{2}$$

2. a) Dualität

b) Da $A_1(4|0|4)$ Mittelpunkt vom Quadrat ABFE

$\Rightarrow$ Kantenlänge a = 8 LE des Hexaeders.

Die Koordinaten der Eckpunkte des Hexaeders lauten somit:

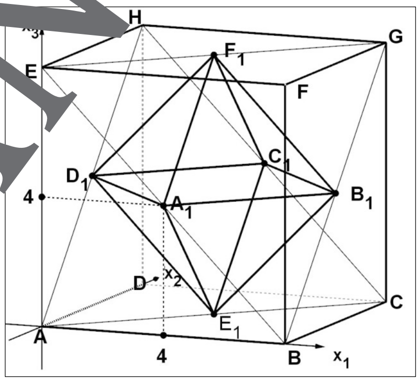


Abb. 10

(1) $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$

(2) C liegt hinter B
$\Rightarrow C(8|8|0)$

(3) D liegt hinter A
$\Rightarrow D(0|8|0)$

(4) E liegt über A
$\Rightarrow E(0|0|8)$

(5) F liegt über B
$\Rightarrow F(8|0|8)$

(6) G liegt über C
$\Rightarrow G(8|8|8)$

(7) H liegt über D
$\Rightarrow H(0|8|8)$

3. a) (1) Der Schwerpunkt S des Oktaeders liegt in der Mittelebene $A_1B_1C_1D_1$ und es gilt: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA_1} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(4|4|4)$$

(2) Der Mittelpunkt eines Platonischen Körpers ist auch gleichzeitig der Mittelpunkt der In-, Um- und Kantenkugel.

Es ist $S(4|4|4)$ (s. o.).

Die Umkugel geht durch alle sechs Eckpunkte des Oktaeders. Der Umkugelradius ist somit gleich dem Abstand eines Eckpunktes vom Mittelpunkt, z. B. der Abstand des Punktes A_1 vom Mittelpunkt S:

$$R_u = \left|\overrightarrow{A_1S}\right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2} = 4$$

(3) Die Inkugel berührt die Seitenflächen (Seitenflächen sind Tangentialebenen) von innen im Schwerpunkt T der jeweiligen Seitenfläche. Das Bestimmen des Abstandes $R_I = \left|\overline{ST}\right|$ wird auf das Abstandsproblem Punkt/Ebene zurückgeführt.

Zum Bestimmen des Abstandes eines Punktes zu einer Ebene gibt es zwei verschiedene Verfahren: Lotfußpunktverfahren und Abstandsbestimmung mithilfe der Hesse'schen Koordinatenform der Ebene.

Lotfußpunktverfahren

Betrachtet wird der Punkt S und sein Abstand zur Ebene E_1, in der die Seitenfläche $A_1B_1F_1$ liegt. Der Radius R_I der Inkugel entspricht dem Abstand des Punktes S zum Lotfußpunkt T des Lotes von S auf die Ebene E_1. Zum Berechnen der Koordinaten des Lotfußpunktes T wird eine Hilfsgerade h, die durch den Punkt S verläuft und orthogonal zur Ebene E_1 ist, aufgestellt. Anschließend wird diese mit der Ebene E_1 zum Schnitt gebracht.

Die Gleichung der Ebene E_1 lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r_1, s_1 \in \mathbb{R} \quad \text{(s. Teilaufgabe 2 f)}$$

Da die Gerade h orthogonal zur Ebene E_1 verläuft, ist der

Normalenvektor $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von E_1 ein Richtungsvektor der Geraden h.

Für die Gleichung der Hilfsgeraden h gilt dann: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung des Lotfußpunktes $\{T\} = E_1 \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LGS aufstellen:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 4 + 4 \cdot r_1 & & = 4 + t \\
\text{II} & \phantom{4 +{}} 4 \cdot r_1 + & 4 \cdot s_1 & = 4 - t \\
\text{III} & 4 & + \; 4 \cdot s_1 & = 4 + t
\end{array}$$

Ordnen:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{IV} & 4\cdot r_1 & & & -t & =0 \\ \text{V} & 4\cdot r_1 & + & 4\cdot s_1 & +t & =4 \\ \text{VI} & & & 4\cdot s_1 & -t & =0 \end{array}$$

Aus IV und VI $\Rightarrow$ VII $r_1 = s_1$

Mit IV + V und VII $\Rightarrow$ $12\cdot r_1 = 12\cdot s_1 = 4$

und damit $r_1 = s_1 = \frac{1}{3}$ bzw. $t = \frac{4}{3}$

$r_1 = s_1 = \frac{1}{3}$ in E_1 oder $t = \frac{4}{3}$ in k einsetzen:

$$\vec{t} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}16\\8\\16\end{pmatrix} \text{ bzw. } T\left(\frac{16}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|\frac{16}{3}\right)$$

Für den Inkugelradius R_I gilt damit:

$$R_I = \left|\overrightarrow{ST}\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}16\\8\\16\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3} \approx 2,309$$

Alternative 1: Hessesche Koordinatenform (HKF)

Der Abstand des Punktes S von der Ebene E_1 kann auch über die HKF der Ebene E_1 bestimmt werden.

Mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ erhält man:

$1\cdot x_1 - 1\cdot x_2 + x_3 - a = 0$

Setzt man die Punktkoordinaten von A_1 ein, so folgt:

$1\cdot 4 - 1\cdot 0 + 1\cdot 4 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 8$

Die Koordinatenform von E_1 lautet: $x_1 - x_2 + x_3 - 8 = 0$

Mit $\left|\overrightarrow{n_1}\right| = \sqrt{3} \;\Rightarrow\;$ HKF der Ebene E$_1$: $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (x_1 - x_2 + x_3 - 8) = 0$

Für den Abstand des Punktes S von der Ebene E$_1$ und damit für den Inkugelradius R$_I$ gilt:

$$R_I = d(S, E_1) = \left|\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (4 - 4 + 4 - 8)\right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \approx 2{,}309$$

Alternative 2

Der Inkugelradius ergibt sich als Abstand des Punktes S vom Berührpunkt T der Tangentialebene. Der Punkt T ist gleichzeitig auch der Schwerpunkt des Dreiecks A$_1$B$_1$F$_1$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OF_1}\right) = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}16\\8\\16\end{pmatrix}$$

Für den Inkugelradius R$_I$ gilt damit:

$$R_I = \left|\overrightarrow{ST}\right| = \left|\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}16\\8\\16\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \approx 2{,}309$$

(4) Die Kantenkugel berührt die Kanten des Oktaeders in ihren Mittelpunkten von innen. Der Kantenkugelradius ist somit gleich dem Abstand des Mittelpunktes S des Oktaeders zum Mittelpunkt einer berührenden Kante. Betracht werde nun der Abstand des Mittelpunktes S des Oktaeders zum Mittelpunkt M$_1$ der Kante $\overline{A_1B_1}$.

Mit $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}$

ist $R_K = \left|\overrightarrow{SM_1}\right| = \left|\left[\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\right]\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

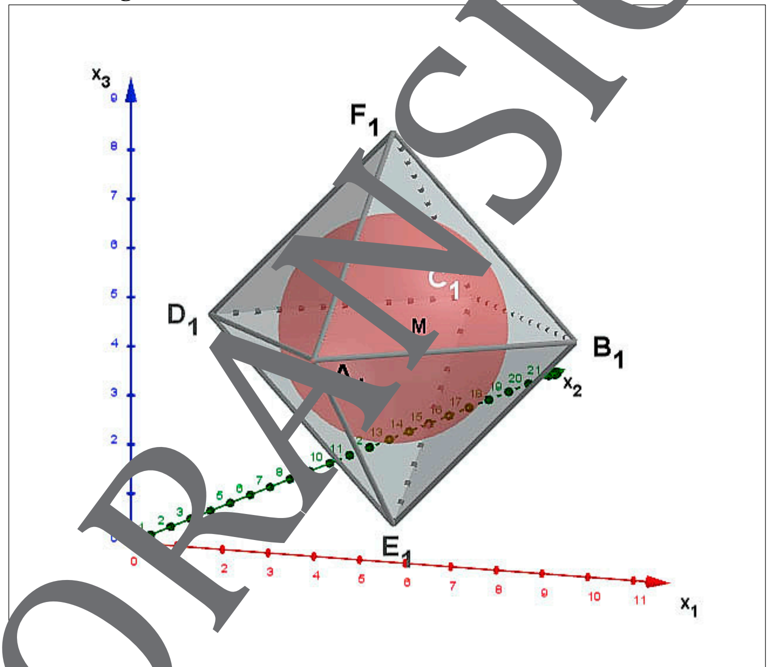
$= 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}828$

b) (1) $R_I = \frac{a}{12} \cdot \sqrt{6} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{4} \cdot \sqrt{6} \right) = \frac{1}{3} \cdot R_U$ (w. z. z. w.)

(2) $R_U = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{6}$

$= \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{a}{6} \cdot \sqrt{6} \right) = \sqrt{3} \cdot R_I$ (w. z. z. w.)

Zusatzaufgabe



Abb[illegible]