UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II

Vom Quadrat zum Schwan – Origami und Mathematik

Geometrie kreativ begreifen

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible] Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Lidiia Moor / iStock / Getty Images Plus
Korrektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Vom Quadrat zum Schwan – Origami und Mathematik

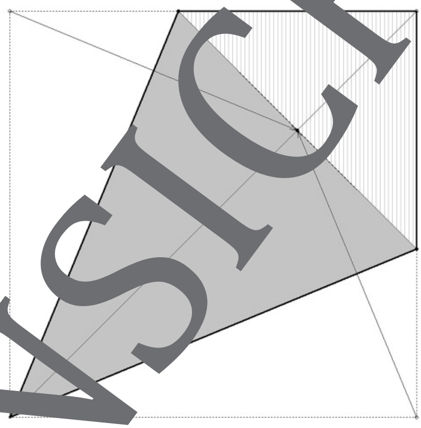
Schritt 1

Markieren Sie auf einem quadratischen Blatt Papier die Diagonale, indem Sie das Blatt so falten, dass ein Eckpunkt des Quadrates auf den gegenüberliegenden Eckpunkt fällt.

Falten Sie das Blatt wieder auseinander.

Falten Sie das Quadrat anschließend so, dass die nicht an der Diagonalen anliegenden Eckpunkte auf der Diagonalen liegen.

Das Papier hat nun die Form eines Drachen.

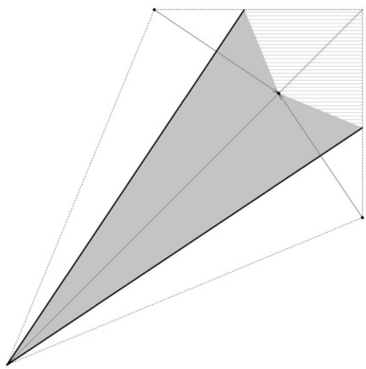


Schritt 2

Wenden Sie das Papier, sodass die geknickten Flächen unten liegen.

Falten Sie nun die Eckpunkte des Drachen, die nicht an der Diagonalen anliegen so, dass sie anschließend auf der Diagonalen liegen.

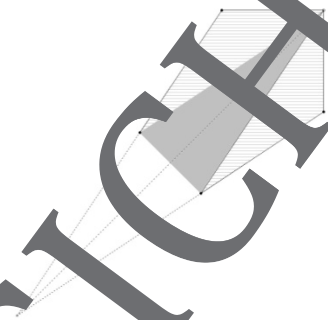
Es entsteht erneut ein Drachen.



Schritt 3

Falten Sie den Eckpunkt der langen Diagonalen, der weiter von der kürzeren Diagonalen entfernt liegt so, dass er mit dem anderen Eckpunkt der Diagonalen zusammenfällt.

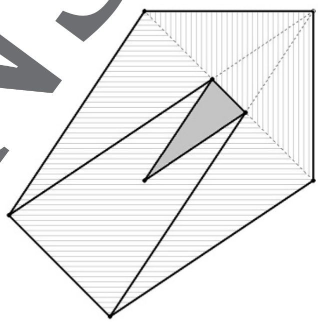
Die Fläche hat jetzt die Form eines symmetrischen Fünfecks.



Schritt 4

Falten Sie den 2. Eckpunkt der Diagonalen (des Ausgangsquadrates) … kürzeren Diagonalen des Drachen, der nach dem 2. Faltschritt entstanden ist.

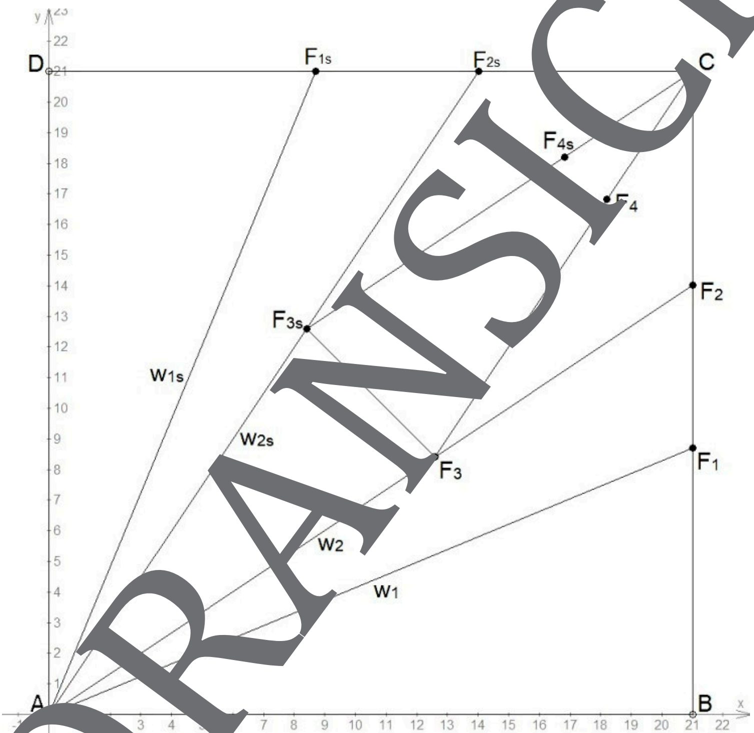
Aus dem Dreieck nach d… ten Faltung in Schritt 3 entstehen o ein … pez und ein Dreieck.



Zur Ba stelanleit… siehe auch:
https:/ www.besser steln.de/Origami/Tiere%20falten/schwan_2.html

Im Folgenden wird von einem Quadrat der Seitenlänge 21 cm (kleinere Seite eines DIN A4-Blattes) ausgegangen.

1. Dieses Quadrat wird achsenparallel zu den Koordinatenachsen in den [illegible] Quadranten eines Koordinatensystems gelegt, sodass ein Eckpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt.



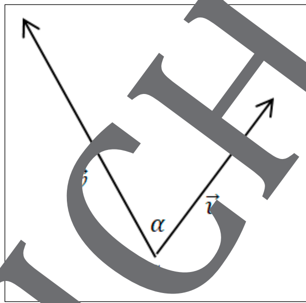
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Faltkanten w_1, w_{1s}, w_2, w_{2s}, F_3F_{3s} und F_4F_{4s}.

b) Berechnen Sie die Länge der Strecken $\overline{F_3F_{3s}}$ und $\overline{F_4F_{4s}}$ aus Faltschritt 3 bzw. 4.

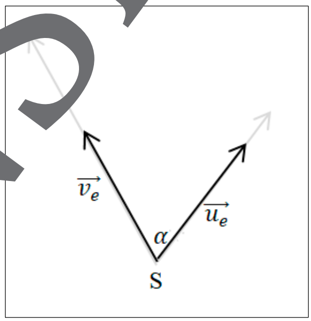
c) Berechnen Sie beim Schwan die Länge des Kopfes, des Halses und der Rückenlinie des Rumpfes.

Tippkarte: Aufstellen der Gleichung der Winkelhalbierenden

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bilden den Winkel α mit dem Scheitelpunkt S.

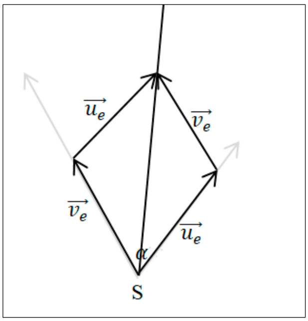


Tipp 1
Bei einer Raute sind die Diagonalen zugleich die Winkelhalbierenden der Innenwinkel.



Tipp 2
Eine Raute hat 4 gleich lange Seiten.
Normieren Sie die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ so, dass sie anschließend gleich lang sind. Multipliziert man z. B. die Vektoren mit dem Kehrwert des Betrags des Vektors, so erhält man Vektoren der Länge 1.

Tipp 3
Trägt man $\vec{u}_e$ an $\vec{v}_e$ oder $\vec{v}_e$ an $\vec{u}_e$ an, so bilden die 4 Vektoren eine Raute.



Tipp 4
Die Gleichung der Winkelhalbierenden lautet:
$g: \vec{x} = \vec{s} + r \cdot \left(\vec{u}_e + \vec{v}_e\right);\ r \geq 0$. Dabei ist $\vec{s}$ der Ortsvektor des Scheitelpunktes S.

Kompetenzprofil
- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie, Kunst
- Kommunikation: Vermutungen äußern; Ergebnisse vorstellen
- Problemlösen: vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: GTR/CAS, (Euklid Dynageo, Geogebra 3D)
- Methode: Einzel-/Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Winkelhalbierende, Achsensymmetrie, Schnitt von Geraden, Schnitt von Ebenen, Winkel zwischen Geraden, Schnitt Gerade – Kugel

Autor: Günther Weber

Lösung

1. a) Die Faltkanten w_1 und w_{1s} sind die Winkelhalbierenden zwischen der Quadratseite $\overline{AB}$ und der Diagonalen $\overline{AC}$ sowie zwischen der Quadratseite $\overline{AD}$ und der Diagonalen $\overline{AC}$. Die Gerade g_{AB} hat den (zur Länge 1) normierten Richtungsvektor $\overrightarrow{v_{11}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Diagonale g_{AC} hat den (zur Länge 1) normierten Richtungsvektor: $\overrightarrow{v_{12}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Mit CAS:

$a:=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}21\\0\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}21\\21\end{bmatrix}:d:=\begin{bmatrix}0\\21\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\21\end{bmatrix}$
$v11:=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$v12:=\dfrac{c-a}{\text{norm}(c-a)}$	$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$
$v\_r:=v11+v12$	$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}+1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$
$v1\_r:=v11+v12$	$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}+1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$
$w1:=a+s\cdot v1\_r$	$\begin{bmatrix}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\cdot s\\\frac{\sqrt{2}\cdot s}{2}\end{bmatrix}$

Der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden ist gleich der Summe der beiden normierten Richtungsvektoren.
Mit A als Anbindungspunkt lautet die Punkt-Richtungsform der Winkelhalbierenden w_1:

$$w_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}; r \geq 0$$

$gbc:=b+r\cdot(c-b)$	$\begin{bmatrix} 21 \\ 21\cdot r \end{bmatrix}$
solve($gbc=w1,\{r,s\}$)	$r=\sqrt{2}-1$ and $s=-2\cdot(\sqrt{2}-2)$
$f1:=gbc \mid r=\sqrt{2}-1$	$\begin{bmatrix} 21 \\ 21\cdot(\sqrt{2}-1) \end{bmatrix}$

Zur Bestimmung des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden w_1 mit der Quadratseite $\overline{BC}$ $g_{BC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \leq s \leq 1$ werden die Geradengleichungen miteinander kombiniert. Als Schnittpunkt erhält man den Punkt $F_1\left(21 \mid 21\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$.

Die Koordinaten des Punktes F_{1s} erhält man durch Spiegelung des Punktes F_1 an der Diagonalen $\overline{AC}$. Die Diagonale ist die 1. Winkelhalbierende. Bei der Spiegelung eines Punktes an der 1. Winkelhalbierenden werden die Koordinaten des Punktes getauscht.

Der Punkt F_{1s} hat somit die Koordinaten $F_{1s}\left(21\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) \mid 21\right)$ und die Zwei-Punkteform der Winkelhalbierenden w_2 lautet:

$$w_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 21\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) \\ 21 \end{pmatrix}; r \geq 0$$

Mit CAS:

$f1s:=\begin{bmatrix} 21\cdot(\sqrt{2}-1) \\ 21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21\cdot(\sqrt{2}-1) \\ 21 \end{bmatrix}$
$w2:=a+s\cdot(f1s-a)$	$\begin{bmatrix} 21\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot s \\ 21\cdot s \end{bmatrix}$

Die Faltkanten w_2 und w_{2s} sind die Winkelhalbierenden zwischen der Winkelhalbierenden w_1 und der Diagonalen $\overline{AC}$ sowie zwischen der Winkelhalbierenden w_{1s} und der Diagonalen $\overline{AC}$. Normiert man die Richtungsvektoren und addiert sie anschließend, so erhält man als Gleichung der Winkelhalbierenden w_2:

$$w_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1,63 \\ 1,09 \end{pmatrix}; r \geq 0$$

Mit CAS:

$$v21 := \frac{f1-a}{\text{norm}(f1-a)} \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{4\cdot(\sqrt{2}+2)}}{4} \\ \frac{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sqrt{4\cdot(\sqrt{2}+2)}}{2} \end{bmatrix}$$

$$v22 := \frac{c}{\text{norm}(c)} \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$v2\_r := v21+v22 \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$w2 := a+s\cdot v2\_r \quad \begin{bmatrix} 1.63099\cdot s \\ 1.08979\cdot s \end{bmatrix}$$

Als Schnittpunktes der Winkelhalbierenden w_2 mit der Quadratseite $\overline{BC}$ erhält man den Punkt:

$F_2\ (21|14,03)$

Der Punkt F_{2s} hat somit die Koordinaten $F_{1s}\ (14,03|21)$. Die Gleichung der Winkelhalbierenden w_{2s} lautet:

$$w_{2s} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 14,03 \\ 21 \end{pmatrix}; r \geq 0$$

Mit CAS:

$$\text{solve}(gbc=w2,\{r,s\}) \quad r=0.668179 \text{ and } s=12.8756$$

$$f2 := w2|s=12.8756 \quad \begin{bmatrix} 20.9999 \\ 14.0317 \end{bmatrix}$$

$$f2s := \begin{bmatrix} 14.0317 \\ 21 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 14.0317 \\ 21. \end{bmatrix}$$

$$w2s := a+s\cdot(f2s-a) \quad \begin{bmatrix} 14.0317\cdot s \\ 21.\cdot s \end{bmatrix}$$

Die Faltkante F_3F_{3s} entspricht der Diagonalen BD und die Faltkante F_4F_{4s} verläuft parallel zur Geraden BD durch den Punkt F_2. Die Gleichungen der Kanten lauten:

$$g_{BD} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$g_{F_2F_{2s}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 14,03 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit CAS:

$$g\_f3f3s := b+t\cdot(d-b) \quad \begin{bmatrix} 21-21\cdot t \\ 21\cdot t \end{bmatrix}$$

$$g\_f4f4s := f2+k\cdot(d-b) \quad \begin{bmatrix} 20.9999-21.\cdot k \\ 21.\cdot k+14.0317 \end{bmatrix}$$

b) Der Winkel α zwischen Hals und Kopf ist festgelegt durch die von S_k ausgehenden Vektoren $\overrightarrow{S_kS_s}$ und $\overrightarrow{S_kS_h}$. Einsetzen in die Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

erhält man $\cos(\alpha) \approx 0{,}870$ und $\alpha \approx 29{,}59°$.

Mit CAS:

$$\frac{\text{dotP}(ss-sk,sh-sk)}{\text{norm}(ss-sk)\cdot\text{norm}(sh-sk)} \quad 0.869849$$

$$\alpha:=\cos^{-1}(0.869604) \quad 29.5873$$

Der Winkel β zwischen Hals und Rumpflinie ist festgelegt durch die von S_h ausgehenden Vektoren $\overrightarrow{S_hS_e}$ und $\overrightarrow{S_hS_e}$.

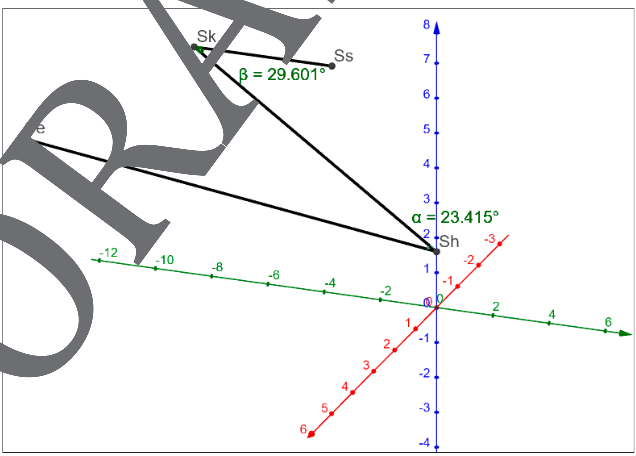
Einsetzen in die Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren erhält man: $\cos(\beta) \approx 0{,}918$ und $\beta \approx 23{,}41°$

Mit CAS:

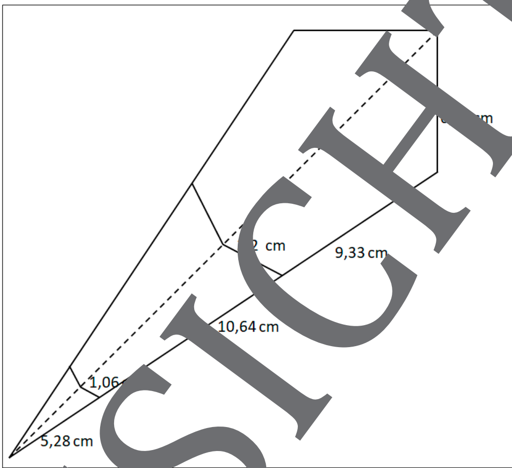
$$\frac{\text{dotP}(sk-sh,se-sh)}{\text{norm}(sk-sh)\cdot\text{norm}(se-sh)} \quad 0.917948$$

$$\beta:=\cos^{-1}(0.917751) \quad 23.4005$$

Anmerkung: Das Querschnittsprofil des Schwans sieht dann wie in der folgenden Abbildung aus.



b) Mithilfe des Drachen nach der 2. Faltung kann man konstruieren, wie weit die äußeren Enden des Kopfes von S_h bzw. die Spitze des Kopfes von S_s entfernt sind. Da die Faltkanten bei der 3. und 4. Faltung parallel verlaufen, kann man ebenso den Abstand von dem Punkt S_k ermitteln.



Zeichnet man nun 3 Kugeln um S_h, S_k und S_s mit den bekannten Abständen, so schneiden sich die 3 Kugeln in einem Punkt. Dies ist der Punkt S_{kl}. Durch Spiegelung an der yz-Koordinatenebene erhält man den Punkt S_{kr}.
Nach Einzeichnen aller Punkte und verbinden entsprechender Punkte in einem 3D-Geometrieprogramm erhält man als Draufsicht auf den Schwan z. B. die nebenstehende Abbildung.