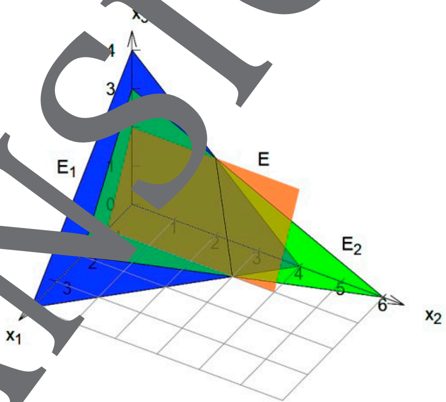
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Wann kann man „Ebenen gleichsetzen“?

Kritisches Hinterfragen mathematischer Routinen

RAABE,
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin C[illegible]
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Mona Hitzenauer
Bildnachweise: Mona Hitzenauer
Lektorat: Mona Hitzenauer

Wann kann man „Ebenen gleichsetzen“?

Eine Standardaufgabe in der analytischen Geometrie ist die Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen. Dabei können z. B. beide Ebenen durch Koordinatengleichungen gegeben sein.

1. Gegeben sind die Ebenen
   E_1: $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$ und E_2: $3x_1 + x_2 + 2x_3 - [illegible] = 0$.

   a) Begründen Sie, warum die beiden Ebenen eine Schnittgerade haben müssen.

   b) Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

   c) Zeichnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ohne weitere Rechnung ein.

   d) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2 an.

Eine übliche Methode, gemeinsame Punkte von Geraden oder Ebenen zu finden, ist das **Gleichsetzen**. Rechnerisch gesehen setzt man dabei einzelne Teile der Geraden- oder Ebenengleichung gleich.

2. a) Gegeben sind die beiden Geraden g: $y = x$ und h: $y = -0{,}5x + 1$.
   Stellen Sie die beiden Geraden in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

   b) Gegeben sind die beiden Geraden

   $$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Wie liegen die beiden Geraden zueinander?

c) Gegeben sind die beiden Ebenen:

$$E_3:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_4:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen.

3. Gesucht ist, falls vorhanden, die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_4.

a) Begründen Sie, warum der Ansatz:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aus formalen Gründen nicht zulässig ist.

b) Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

In den Gleichungen für die Ebenen aus Aufgabe 1 steht in beiden Fällen auf der rechten Seite null, dann müsste man doch eigentlich gleichsetzen können? Wir untersuchen dies an einem Beispiel:

4. Gegeben sind die beiden Ebenen:
E_1: $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$ und E_2: $3x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$,
die eine Schnittgerade haben (siehe Aufgabe 1).
Gleichsetzen der linken Seiten liefert:
$x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 6$
$2x_1 + x_3 = 2 \quad (A)$

a) Warum kann das Gleichsetzen der linken Seiten, schon aus rein formalen Gründen, nicht die Gleichung der Schnittgeraden liefern?

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Schnittgeraden. Was hat die Schnittgerade mit der Gleichung (A) zu tun?

c) Wie kann man die Punkte, deren Koordinaten die Gleichung (A) erfüllen, veranschaulichen?

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/vertiefend
- Fachlicher Bezug: mathematische Routinen kritisch hinterfragen
- Kommunikation: Vermutungen äußern, argumentieren, begründen, diskutieren
- Problemlösen: Lösungen berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Modellierung: –
- Medien: Beamer zur Visualisierung
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Schnittpunkte, Schnittgeraden, Geradengleichungen, Ebenengleichungen, Darstellung, Punktmengen, Mittelebene, Normalenvektor, Spurgerade, Skalarprodukt, Kreuzprodukt

Autor: Peter Bunzel

Lösung

1. a) Mögliche Normalenvektoren können direkt an den Koeffizienten der Ebenengleichungen abgelesen werden:

Normalenvektor von E_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E_2: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Normalenvektoren der beiden Ebenen sind nicht Vielfache voneinander, demnach sind die Ebenen nicht identisch oder parallel zueinander sondern schneiden sich.

b) Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch E_1

$D_1(4|0|0)$; $D_2(0|4|0)$; $D_3(0|0|4)$

Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch E_2:

$D_1^*(2|0|0)$; $D_2^*(0|6|0)$; $D_3^*(0|0|3)$

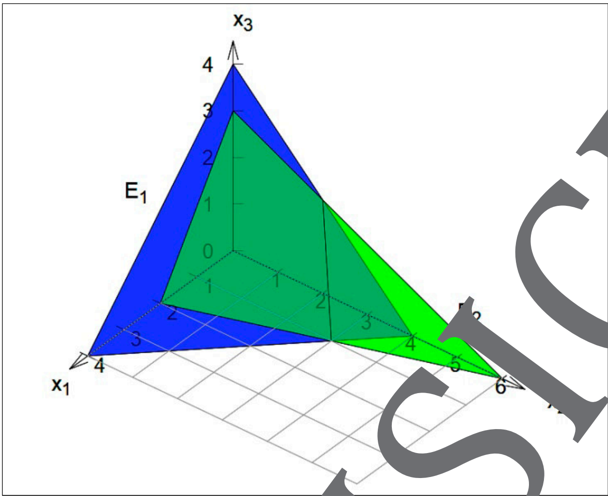


Abb. 1: Aufgabe 1b)

c)

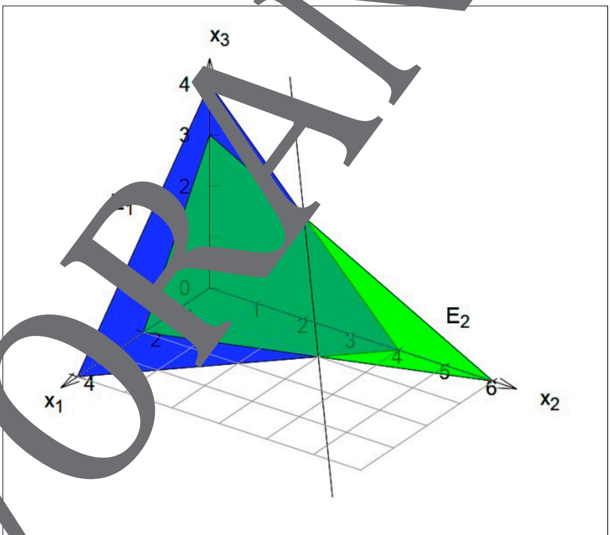


Abb. 2: Aufgabe 1c)

d) Da die Spurgeraden in den Koordinatenebenen liegen, kann man die Koordinaten von zwei Punkten der Schnittgeraden aus dem Schrägbild ablesen: A(1|3|0); B(0|2|2).
Damit gilt für die Schnittgerade:

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. In dieser Aufgabe ist **Gleichsetzen** anwendbar.

a) g: $y = x$

h: $y = -0{,}5x + 1$

Gleichsetzen liefert:

$x = -0{,}5x + 1 \Leftrightarrow 1{,}5x = 1$

$\Leftrightarrow \; x = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \; S\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$

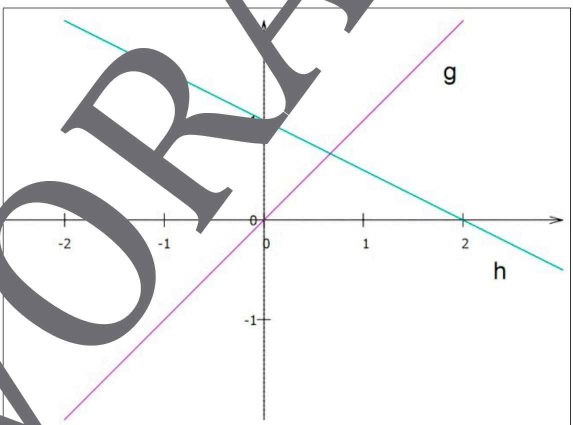


Abb. 3: Aufgabe 2a)

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen liefert: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(I) $1 + s = 4 + 2t \quad \Leftrightarrow s - 2t = 3$
(II) $-2 = 3 + t \quad \Leftrightarrow -t = 5 \quad \Rightarrow t = -5$
(III) $3 + 2s = -2t \quad \Leftrightarrow 2s + 2t = -3$

Einsetzen von $t = -5$ in (I) und (III):

(I) $s + 10 = 3 \quad \Rightarrow s = -7$
(III) $2s - 10 = -3 \quad \Rightarrow 2s = 7$

Dies ergibt einen Widerspruch. Da die Richtungsvektoren von g und h nicht Vielfache voneinander sind, liegen die beiden Geraden windschief zueinander.

c) E_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; E_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$1 + s + t = -u \quad \Leftrightarrow \quad s + t = -1 - u$ (I)
$3 + t = 2 + u + 2v \quad \Leftrightarrow \quad t = -1 + u + 2v$ (II)
$-s - 2t = 2 + u - v \quad \Leftrightarrow \quad -s - 2t = 2 + u - v$ (III)

Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen s und t oder u und v.
Am leichtesten lässt sich auf den ersten Blick u eliminieren:

(I) + (II) $s + 2t = -2 + 2v$
(I) + (III) $-t = 1 - v$

Das führt aber nicht weiter.

Zweiter Versuch: In Gleichung (II) fehlt s bereits.
Mit (I) + (III) ergibt sich eine weitere Gleichung ohne s.

(II) $t = -1 + u + 2v$
(I) + (III) $-t = 1 - v$

Addition der beiden Gleichungen liefert: $0 = u + v \;\Rightarrow\; v = -u$

Einsetzen in die Gleichung von [illegible] liefert die Gleichung der Schnittgeraden:

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + (-u)\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1-0\\1-2\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die beiden Ebenen sind identisch mit den Ebenen E_1 und E_2 aus Aufgabe 1. Die Richtungsvektoren der Schnittgeraden sind gleich.

Den Stützvektor aus Lösung 2c) erhält man, wenn man in Lösung 1d) für den Parameter [illegible] den Wert 1 einsetzt.

3. a) Auf der linken Seite stehen Zahlen, also eindimensionale Vektoren. Diese kann man nicht mit dreidimensionalen Vektoren gleichsetzen.