UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II

Maibaumfest mit Kindervergnügen

Geraden- und Ebenengleichungen anwenden

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: gabort71 / iStock
Korrektorat: Christin Wollert

Kompetenzprofil

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: argumentieren und begründen
- Problemlösen: Lösungen angeben
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzel- oder Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Geraden- und Ebenengleichungen und ihre gegenseitige Lage, Längen und Winkel sowie deren Anwendungen

Autor: Alfred Müller

Lösung

1. A(–2 | –3 | 2), B(–4 | –4 | 4)

   a) Die Punkte O, A und B bestimmen die Hangebene E. Es gilt:

$$E: \vec{x} = \vec{o} + \mu \cdot \overrightarrow{OA} + \rho \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Ein Normalenvektor der Ebene E wird mithilfe des Vektorprodukts bestimmt:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: x_1 + x_3 = 0$$

$$g_1 = AC: \vec{x} = \vec{a} + \sigma \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ mit } C(0 \mid 0 \mid 8)$$

$$g_2 = \ BC: \vec{x} = \vec{b} + \tau \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Der Winkel α (β) ist derjenige Winkel, der den Winkel, den der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E mit der Geraden g_1 (g_2) einschließt, zu 90° ergänzt. Es gilt:

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{n_E}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot 7} = \frac{8}{7\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 53{,}91°$$

$$\cos(90° - \beta) = \sin\beta = \frac{\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{n_E}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{48}} = \frac{8}{4\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow \beta = 54{,}74°$

Winkel ε:

$$\cos\varepsilon = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{7 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{44}{28\sqrt{3}} = \frac{11}{7\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon = 24{,}87°$$

Fläche des Dreiecks ABC:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= 2\sqrt{2} \approx 10{,}20 \text{ m}^2$$