UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II

Planung einer Gartenanlage

Mathematik praxisnah erleben

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-6[illegible]
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible] Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Martin Wahlborg/GettyImages/E+
Korrektorat: [illegible] H[illegible]nsgens

Planung einer Gartenanlage

Das Planungsbüro GaLaBau wird mit der vorläufigen Planung einer größeren Gartenanlage in einem Park beauftragt. Die Anlage soll auf einem leicht abfallenden Gelände zwischen 3 markanten Punkten im Park entstehen und „fast gleichwinklig" sein.

In einem geeigneten Koordinatensystem haben die markanten Punkte die Koordinaten A (0|0|2,7), B (12|14|3) und C (-6|18|3,1); 1LE ≙ 5 m.

1. a) Stellen Sie die Gleichung der durch die Punkte A, B und C festgelegten Ebene E_{ABC} auf und berechnen Sie das Gefälle des Geländes gegenüber einer zur xy-Ebene parallelen Ebene durch den Punkt A.

   b) Überprüfen Sie, ob die dreieckige Fläche die Forderung „fast gleichwinklig" erfüllt. Dies ist der Fall, wenn der größte Unterschied zwischen den Winkeln kleiner ist als 3°.

2. Innerhalb der Gartenanlage soll ein Teich mit einem Durchmesser von 10 m angelegt werden. Der Mittelpunkt des Teiches liegt in dem Koordinatensystem bei T (1,8|10,8|2,8).

   a) Zeigen Sie mithilfe des Punktes T, dass das Gelände nicht plan ist.

   b) Überprüfen Sie, ob das Gelände beim Punkt T eine Senke oder eine Erhebung gegenüber dem ebenen Gelände hat.

   Anmerkung:
   Da es sich um eine vorläufige Planung handelt, wird bei den weiteren Aufgaben weiter mit dem Punkt T (1,8|10,8|2,8) gerechnet.

3. Um den Teich verläuft ein Weg, der 1,5 m breit ist. Die Vorgaben an die Planer sind, dass dieser Weg wenigstens einen Abstand von 20 m von den von A ausgehenden Abgrenzungen der Anlage hat. Als zulässig wird auch noch angesehen, wenn der Abstand um höchstens 5% von der Vorgabe abweicht. Überprüfen Sie, ob die Vorgaben erfüllt werden.

4. Der Teich soll umschlossen werden durch ein Blumenbeet, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 30 m hat. Der Mittelpunkt der dreieckigen Fläche soll mit dem Mittelpunkt des Teiches übereinstimmen. Die von A über T hinausgehende Linie soll eine Symmetrieachse des Dreiecks sein. Bestimmen Sie die Eckpunkte des dreieckigen Blumenbeetes.

5. Auf dem Weg von B nach C soll ein 3 m breiter Weg zum Teich hin angelegt werden. Dieser Weg soll senkrecht von dem Weg von B nach C abbiegen und auf den Punkt T zulaufen. Bestimmen Sie den Bereich auf dem Weg von B nach C in den der Weg vom Teich mündet.

6. An den Weg von A nach B bzw. von A nach C soll ein zu den Wegen paralleler Streifen von der Fläche abgetrennt werden, der mit Blumen, Kriechgewächsen bzw. Sträuchern bepflanzt werden soll. Die geradlinigen Abgrenzungen dieser Streifen verlaufen durch den Punkt $P\left(\frac{18}{60}\,|\,\frac{46}{60}\,|\,\frac{163}{60}\right)$
   a) Berechnen Sie die Größe [illegible] Streifen.
   b) Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Fläche des Streifens an der Gesamtfläche der Gartenanlage.

7 Am Rand des inneren Blumenbeetes sollen 4 Masten aufgestellt werden, die an den Punkten $M_1\left(-\frac{5}{6}\,|\,13\,|\,4\right)$, $M_2\left(\frac{22}{7}\,|\,\frac{29}{3}\,|\,\frac{27}{7}\right)$, $M_3(5\,|\,12\,|\,4)$ und $M_4\left(-\frac{1}{3}\,|\,\frac{[illegible]}{2}\,|\,\frac{39}{[illegible]}\right)$ Befestigungen haben. Im Winter sollen zwischen den Befestigungen M_1 und M_2 sowie zwischen den Befestigungen M_3 und M_4 Leuchtgirlanden zur Illumination aufgespannt werden.
   a) Zeigen Sie, dass sich die Leuchtgirlanden „fast schneiden". Berechnen Sie den Abstand zwischen den Leuchtgirlanden und bestimmen Sie die Punkte, bei denen der geringste Abstand vorliegt.
   b) Überprüfen Sie, ob sich die Punkte, bei denen die Leuchtgirlanden die geringste Entfernung voneinander haben, über dem Teich liegen.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: Vermutungen äußern; Ergebnisse vorstellen
- Problemlösen: Beweis führen, vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: GTR/CAS
- Methode: Einzel-/Partnerarbeit,
- Inhalt in Stichworten: Winkel im Dreieck, Normalenvektor, Winkel Ebene – Ebene, Punktprobe bzgl. einer Ebene, Abstand zweier Punkte, Abstand Punkt – Gerade, Abstand Punkt - Ebene, Ebenen in Koordinatenform, Schnitt Ebene – Ebene, Schnitt Gerade – Ebene, Schnitt Gerade – Gerade, Lösen von B[illegible]sgleichungen, Flächeninhalt Trapez, Flächeninhalt Dreieck, Abstand windschiefer Geraden

Autor: Günther Weber

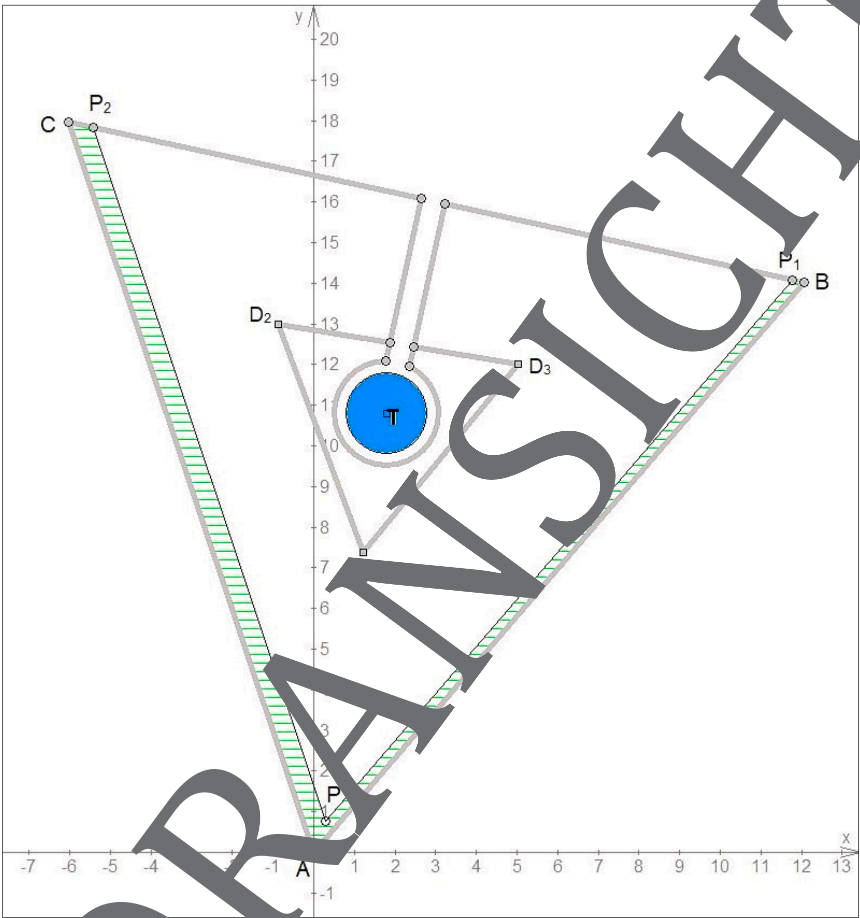
Methodisch – didaktische Hinweise

Die Aufgaben sind unabhängig voneinander, sodass sie aufgeteilt auf mehrere Gruppen bearbeitet werden können. Anschließend stellen die Schüler dann ihre Ergebnisse vor, sodass die Gesamtplanung des Planungsbüros vorliegt.

Günstig ist es auf jeden Fall vor der Bearbeitung der Aufgaben den gesamten beschreibenden Text vorzulesen und [illegible] eine Skizze anzufertigen. Da das Gelände nur wenig geneigt ist, kann eine senkrechte Projektion in die xy-Ebene den Sachverhalt sehr gut wiedergeben. Hier ist es dann auch gut möglich zu überprüfen, ob die berechneten Ergebnisse stimmig sind.

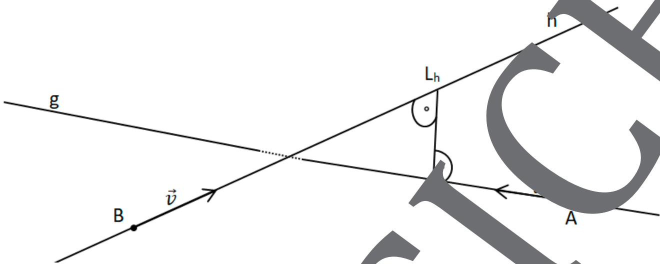
Bei der Berechnung der Ergebnisse mit einem CAS werden die Ergebnisse in einer Variablen abgespeichert. In nachfolgende Berechnungen fließen daher die „genauen“ Werte ein. Im Gegensatz hierzu werden in der Rechnung „per Hand“ gerundete Ergebnisse in die nachfolgenden Rechnungen übernommen. Die in den CAS-Screenshots dargestellten Ergebnisse und die Ergebnisse, die „per Hand“ ermittelt werden, können sich daher unterscheiden.

Zur Differenzierung können bei einigen Aufgaben, z. B. bei Aufgabe 6 einmal beide Wege durchgeführt werden und anschließend die Rundungsfehler näher betrachtet werden.


y
x
C
P2
P1
B
D2
D3
T
P
A

Tipps zum Abstand windschiefer Geraden und Lotfußpunkte

Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden
$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u};\ r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v};\ s \in \mathbb{R}$



Tipp 1
Die Lotfußpunkte L_g bzw. L_h sind feste Punkte der Geraden g bzw. h.

Tipp 2
Der Vektor $\overrightarrow{L_gL_h}$ steht senkrecht auf den Geraden g und h.

Tipp 3
Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist gleich 0.

Tipp 4
Durch Ausrechnen der Skalarprodukte $\overrightarrow{L_gL_h} \circ \vec{u}$ bzw. $\overrightarrow{L_gL_h} \circ \vec{v}$ und Nullsetzen entsteht ein Gleichungssystem mit 2 Variablen.

Tipp 5
Durch Einsetzen der Lösung des Gleichungssystems in die zugehörige Geradengleichung erhält man die Ortsvektoren der Lotfußpunkte.

Tipp 6
Der Abstand der windschiefen Geraden ist gleich dem Abstand der Lotfußpunkte.

Lösung

1. a) Die Dreipunkteform der Ebene E_{ABC} lautet:

$$E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 0,3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

Mit CAS:

$$a := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.7 \end{bmatrix} : b := \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix} : c := \begin{bmatrix} -6 \\ 18 \\ 3.1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -6. \\ 18. \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

$$e\_abc := a + r \cdot (b-a) + s \cdot (c-a) \qquad \begin{bmatrix} 12 \cdot r - 6. \cdot s \\ 14 \cdot r + 18. \cdot s \\ 0.3 \cdot r + 0.4 \cdot s + 2.7 \end{bmatrix}$$

Ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf den Spannvektoren der Ebene E_{ABC}; das Skalarprodukt von Normalenvektor und Spannvektor ist somit gleich 0.

I	$12 \cdot n_1 + 14 \cdot n_2 + 0,3 \cdot n_3 = 0$
II	$-6 \cdot n_1 + 18 \cdot n_2 + 0,4 \cdot n_3 = 0$
$I + 2 \cdot II$	$50 \cdot n_2 + 1,1 \cdot n_3 = 0$

Mit CAS:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 12 \cdot x + 14 \cdot y + \frac{3 \cdot z}{10} = 0 \\ -6 \cdot x + 18 \cdot y + \frac{2 \cdot z}{5} = 0 \end{cases}, \{x, y, z\}\right)$$

$$x = \frac{c1}{1500} \text{ and } y = \frac{-11 \cdot c1}{500} \text{ and } z = c1$$

Wählt man $n_3 = 1$, so ist $n_2 = -\frac{11}{500}$ und $n_1 = \frac{1}{1500}$.

Alternativer Lösungsweg:
Der Normalenvektor ist gleich dem Vektorprodukt der Spannvektoren.

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -6,6 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Mit CAS:

$$\text{crossP}(b-a, c-a) \qquad \begin{bmatrix} 0.2 \\ -6.6 \\ 300. \end{bmatrix}$$

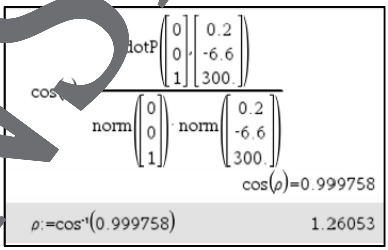
Die zur xy-Ebene parallele Ebene durch A hat ebenso wie die xy-Ebene den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Neigungswinkel φ kann berechnet werden mithilfe der Normalenvektoren der Ebene E_{ABC} und der zur xy-Ebene parallelen Ebene durch A.

Einsetzen in die Formel $\cos(\varphi) = \frac{\vec{n_1} \circ \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$ zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ ergibt:

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0,2 \\ -6,6 \\ 300 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0,2 \\ -6,6 \\ 300 \end{pmatrix}\right|} \right| \approx 0,999758$$

$$\varphi = \cos^{-1}(0,999758) \approx 1,26°$$

Mit CAS:



Der Neigungswinkel des Geländes gegenüber einer zur xy-Ebene parallelen Ebene durch den Punkt A beträgt ungefähr 1,26°.

b) Die Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist:

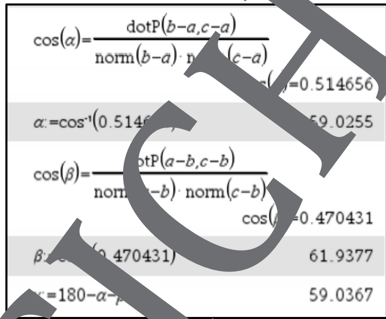
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Der Winkel α wird eingeschlossen von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 0,3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0,4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0,4 \end{pmatrix} \right|} \approx 0,5147$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,5147) \approx 59,03°$$

Mit CAS:



Der Winkel β wird eingeschlossen von den Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} -12 \\ -14 \\ -0,3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -18 \\ 4 \\ 0,1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -12 \\ -14 \\ -0,3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -18 \\ 4 \\ 0,1 \end{pmatrix} \right|} \approx 0,4704$$

$$\beta = \cos^{-1}(0,4704) \approx 61,94°$$

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°.

$$\gamma = 180° - 59,03° - 61,94° = 59,03°$$

Die Vorgaben, dass das Dreieck „fast gleichwinklig" ist, werden eingehalten, da die Winkel um weniger als 3 ° voneinander abweichen.

2. a) Die Punkt-Normalenform der Ebene E_{ABC} hat die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 0,2 \\ -6,6 \\ 300 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0,2 \\ -6,6 \\ 300 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,7 \end{pmatrix} = 0$$

und die Koordinatenform: $0,2x - 6,6y + 300z = 810$.

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 10,8 \\ 2,8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} -1,8 \\ -10,8 \\ -0,1 \end{pmatrix} \right|} \cdot \begin{pmatrix} -1,8 \\ -10,8 \\ -0,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,23 \\ 7,38 \\ 2,77 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow D_1(1,23 \mid 7,38 \mid 2,77)$$

Zur Berechnung des Ortsvektors von M_1 ist ein Vielfaches des Gegenvektors des Vektors $\overrightarrow{TA}$ an T anzutragen.

$$\vec{m_1} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 10,8 \\ 2,8 \end{pmatrix} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} -1,8 \\ -10,8 \\ -0,1 \end{pmatrix} \right|} \cdot \begin{pmatrix} -1,8 \\ -10,8 \\ -0,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,08 \\ 12,51 \\ 2,82 \end{pmatrix}$$

Die Punkte D_2 und D_3 liegen auf einer Senkrechten g_s zur Geraden g_{AT}, die in der Ebene EABC liegt. Diese Gerade g_s ist die Schnittgerade einer Ebene EH senkrecht zur Geraden g_{AT} durch M_1 und der Ebene EABC.

Mit CAS:

```
dotP(v_ta,[x;y;z])-dotP(v_ta,m1)=0
        -1.8·x-10.8·y-0.1·z+139.125=0.
dotP(v_ta,e_abc)-dotP(v_ta,m1)=0
        -172.83·r-183.64·s+138.855=0.
solve(dotP(v_ta,e_abc)-dotP(v_ta,m1)=0,r)
        r=-1.06255·(s-0.756126)
```

Mit dem Vektor $\overline{AT}$ als Normalenvektor und dem Punkt M_1 als Punkt der Ebene lautet die Punkt-Normalenform von E_H:

$$\begin{pmatrix} 1,8 \\ 10,8 \\ 0,1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \begin{pmatrix} 1,8 \\ 10,8 \\ 0,1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2,08 \\ 12,51 \\ 2,82 \end{pmatrix} = 0$$

Und die zugehörige Koordinatenform lautet:

$1,8x + 10,8y + 0,1z = 139,134$.

Einsetzen der Koordinaten der Ebenengleichung E_{ABC} in die Koordinatenform der Ebenengleichung E_H ergibt die Gleichung

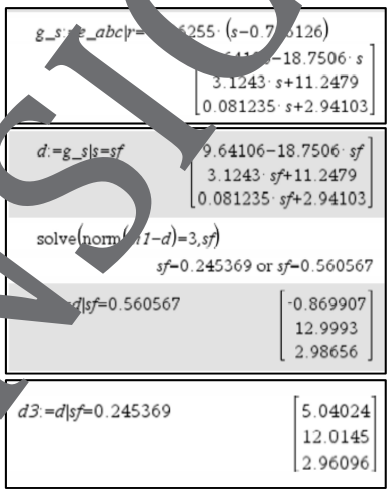
$$1{,}8\cdot(12r-6s)+10{,}8\cdot(14r+18s)+0{,}1\cdot(0{,}3r+0{,}4s+2{,}7)=139{,}134$$

Auflösen der Gleichung nach r ergibt die Lösung: $r \approx -1{,}0[illegible]6s + 0{,}[illegible]034$

Einsetzen von r in die Parameterform der Ebenengleichung führt zur Schnittgeraden:

$$g_s:\vec{x}=\begin{pmatrix}9{,}64\\11{,}25\\2{,}94\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-18{,}75\\3{,}12\\0{,}08\end{pmatrix};\ s\in\mathbb{R}$$

Mit CAS:



Die Punkte D_2 und D_3 sind feste Punkte der Geraden g_s, die vom Punkt M_1 den Abstand 3 LE haben.

Es ist somit $\left|\overrightarrow{M_1D_2}\right|=\left|\overrightarrow{M_1D_3}\right|=3.$

Nach Lösen der Betragsgleichung und Einsetzen der Parameters erhält man als Ortsvektoren

$$\overrightarrow{d_2}=\begin{pmatrix}-0{,}87\\13\\2{,}99\end{pmatrix}\ \Rightarrow D_2(-0{,}87\,|\,13\,|\,2{,}99)$$

und

$$\overrightarrow{d_3}=\begin{pmatrix}5{,}04\\12{,}01\\2{,}96\end{pmatrix}\ \Rightarrow D_3(5{,}04\,|\,12{,}01\,|\,2{,}96)$$

Die Eckpunkte des dreieckigen Beetes sind $D_1(1{,}23\,|\,7{,}38\,|\,2{,}77)$, $D_2(-0{,}87\,|\,13\,|\,2{,}99)$ und $D_3(5{,}04\,|\,12{,}01\,|\,2{,}96)$.