UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II

Uferbefestigungen am Bodensee

Längen, Winkel und Abstände im Alltag entdecken

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin O
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Mona Hitzenauer
Bildnachweis: Peter Bunzel
Korrektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

1. Gegeben sind die beiden Ebenen E_1 und E_2:

   E_1: $x_2 + x_3 = 1$; E_2: $x_1 + x_3 = 1$

   a) Zeigen Sie: Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden.
   Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schnittgerade g.

   b) Skizzieren Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

   c) Welche Winkel α schließen die beiden Ebenen mit der x_1-x_2-Ebene ein?

   d) Welchen Winkel β schließt die Schnittgerade g mit der x_1-x_2-Ebene ein?

   e) Wie groß ist das Verhältnis $\beta:\alpha$ in Prozent?

   f) Welchen Winkel γ schließen die beiden Böschungsflächen ein?

Wir verallgemeinern den Ansatz von Aufgabe 1 und machen die Böschungswinkel variabel.
Zunächst sind die Winkel bei beiden Böschungen gleich.

2. Gegeben sind die beiden Ebenen E_1 und E_2:

   E_1: $x_2 + \frac{1}{a}x_3 = 1$; E_2: $x_1 + \frac{1}{a}x_3 = 1$

   a) Skizzieren Sie die beiden Ebenen und die Schnittgerade.

   b) Geben Sie den Böschungswinkel α der beiden Ebenen in Abhängigkeit von a an.
   Bestimmen Sie den Steigungswinkel β der Schnittgeraden der beiden Ebenen (in Abhängigkeit von a).

   c) Bestimmen Sie das Verhältnis der Winkel $\beta:\alpha$ und eliminieren Sie den Parameter a. Untersuchen Sie das Verhältnis der beiden Winkel für $a \to 0$ und $a \to 90°$.

   Gibt es einen Winkel α, bei dem $\beta = \frac{\alpha}{2}$ ist?

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/vertiefend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: Vermutungen äußern, argumentieren, begründen, diskutieren
- Problemlösen: Probleme erkunden und zerlegen, Lösungen berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Modellierung: –
- Medien: Farbfolie
- Methode: Einzel-/Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Schnittpunkte, Schnittgeraden, Geradengleichungen, Ebenengleichungen, Darstellung, Winkel zwischen Flächen und Ebenen, Steigungswinkel, Durchstoßpunkte, Normalenvektor, Grenzwert, Regel von de l'Hospital

Autor: Peter Bunzel

Lösung

1. a) **Gemeinsame Punkte von E_1 und E_2**

Die gemeinsamen Punkte erfüllen zwei Bedingungen:

(I) $x_2 + x_3 = 1$
(II) $x_1 + x_3 = 1$

Dieses Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen enthält keinen Widerspruch. Eine Variable kann frei gewählt werden. Wir setzen sinnvollerweise $x_3 = t$.

$\Rightarrow \quad x_2 = 1 - x_3 = 1 - t; \quad x_1 = 1 - x_3 = 1 - t$

Für die gemeinsamen Punkte gilt also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden.

Schnittgerade:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) **Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch E_1:**

D_1 existiert nicht; $D_2(0|1|0)$; $D_3(0|0|1)$

$\Rightarrow$ E_1 ist parallel zur x_1-Achse.

Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch E_2:

$D_1(1|0|0)$; D_2 existiert nicht; $D_3(0|0|1)$

$\Rightarrow$ E_2 ist parallel zur x_2-Achse.

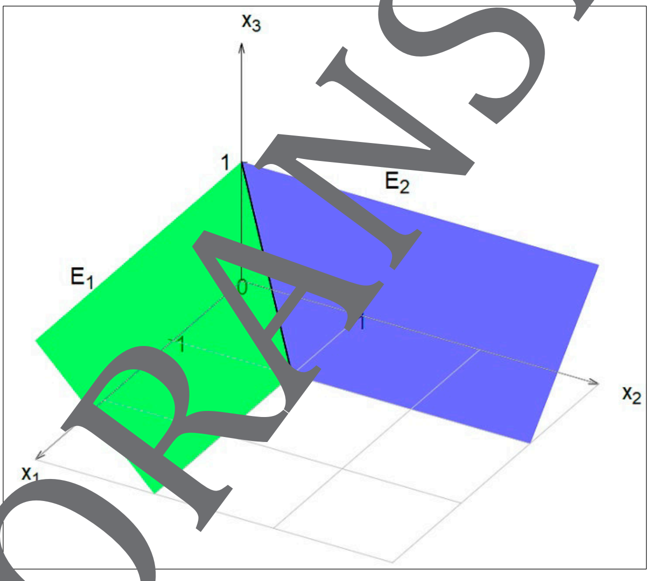

Abb. 2

c) **1. Lösungsweg**

Die Schnittwinkel können mit Hilfe der Normalenvektoren bestimmt werden.

Schnittwinkel α_1

x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene E_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}_1| = \sqrt{2}$

$$\cos(\alpha_1) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7071 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 45°$$

Schnittwinkel α_2

Ebene E_2: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{2}$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7071 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 45°$$

2. Lösungsweg
Die Schnittwinkel können auch mit Hilfe von rechtwinkligen Dreiecken gefunden werden.

C und D sind die Durchstoßpunkte der x_2- und x_3-Achse durch E_1:
C(0|1|0); D(0|0|1)

A und D sind die Durchstoßpunkte der x_1- und x_3-Achse durch E_2:
A(1|0|0); D(0|0|1)

Für B gilt: B(1|1|0)

$$\tan(\alpha_1) = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 45°$$

Entsprechend gilt:

$$\tan(\alpha_2) = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 45°$$

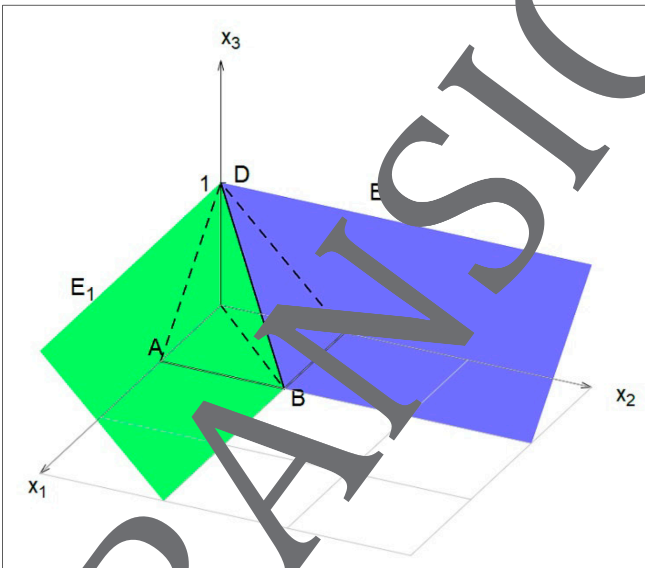

Abb. 3

d) **1. Lösungsweg:** Schnittwinkel von g mit der x_1-x_2-Ebene

Ein (möglicher) Richtungsvektor $\vec{u}$ von g ist: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3}$

Ein (möglicher) Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = 1$

e) Verhältnis der Winkel:

$$\frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{35{,}3°}{45°} \approx 0{,}784 = 78{,}4\,\%$$

Der Steigungswinkel der Schnittgeraden ist also um ca. 21,6 % (also deutlich) kleiner als der Böschungswinkel der Ebenen. Mithilfe eines Lego-Modells kann man sich die Situation gut veranschaulichen. (Dabei ist es nicht wichtig, dass der Steigungswinkel der Flächen etwas größer als 45° ist.)

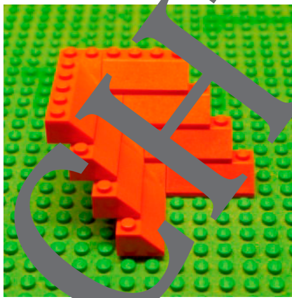

Abb. 5

f) Der Winkel γ' zwischen den beiden **Ebenen** wird bestimmt mithilfe der beiden Normalenvektoren und mit $\cos(\gamma') = \dfrac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Da der Bruch (wegen der Betragszeichen) nicht negativ werden kann, ist der Winkel γ' automatisch maximal 90° groß. **Winkel zwischen Flächen können jedoch größer sein als 90°**, wie die folgende Skizze zeigt:

Die Fläche A liegt in $E1$, die Flächen B und C liegen in $E2$. A schließt mit B einen Winkel ein, der kleiner ist als 90°, während C und A einen Winkel einschließen, der größer ist als 90°. Die Summe der beiden Winkel ist 180°.

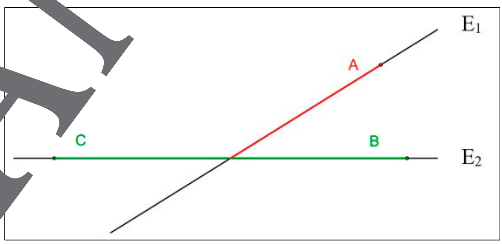

Abb. 6

Wir berechnen zunächst γ':

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}_1| = \sqrt{2}; \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}_2| = \sqrt{2}$$

d) $\tan(\alpha_2) = \dfrac{1}{a}$; $\alpha_2 = 30° \Rightarrow \dfrac{1}{a} = \tan(\alpha_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$$\tan(\beta) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta \approx 26{,}565°$$

$$v = \frac{\beta}{\alpha_2} \approx \frac{26{,}565°}{30°} \approx 0{,}886$$

Der Steigungswinkel der Schnittgeraden ist also um ca. 11,4 % kleiner als der kleinere Böschungswinkel.

Bemerkung:
Kinder, die auf einen „Hüpfberg" wollen, merken ganz schnell durch Beobachten der anderen Kinder oder durch eigene Versuche, dass der Steigungswinkel an der „Kante" zwischen zwei Seitenflächen kleiner ist, als der Steigungswinkel der Seitenflächen.
Nimmt man an, dass die Seitenflächen ganz unten einen Winkel von ca. 45° mit dem Boden einschließen, so kommt man nach Lösung 1e bei der „Kante" auf einen Neigungswinkel, der um ca. 22 % kleiner ist als der der Seitenflächen.

© Peter Bunzel

Abb. 13