UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II

Wohnhausneubau mit Anbau

Flächen- und Rauminhalte berechnen

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: colourbox.de
Lektorat: Christin Wollert

Wohnhausneubau mit Anbau

1. Familie Gerner baut sich ein Einfamilienhaus, das aus einem quaderförmigen Erdgeschoss und einem aufgesetzten Satteldach wie in nebenstehender Skizze. Das Dach besteht aus zwei rechteckigen Flächen.

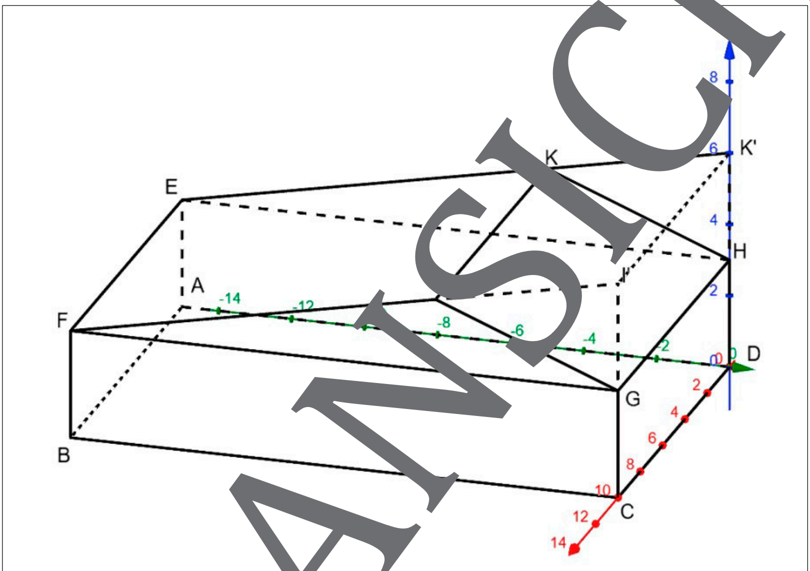

Abb. 1

Bei der Längeneinheit 1 m sind die folgenden Punkte gegeben:
A(0 | – 15 | 0), D(0 | 0 | 0), F(10 | – 15 | 3), I (10 | – 5 | 5) und K(0 | – 5 | 5).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Punkte.

b) Überprüfen Sie, ob das Viereck EFIK ein Quadrat ist und berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

c) Bestimmen Sie dann die Gleichung einer Ebene E_1, in der die Punkte EFIK liegen sowie die einer Ebene E_2, in der die Punkte GHKI liegen, jeweils in Normalenform.

d) Die Punkte EFGH bilden die Dachbodenfläche. Wie groß sind die Neigungswinkel ε_1 bzw. ε_2 der Ebenen E_1 bzw. E_2 zur Dachbodenoberfläche?

e) Die Giebelflächen FGI und EHK sollen mit Holz verkleidet werden. Wie viele Quadratmeter Holz werden mindestens benötigt?

f) Wie groß ist der umbaute Raum, d. h. der Rauminhalt des gesamten Wohnhauses?

g) Da ein Anbau geplant ist, wird die Dachfläche EFIK bis zur x_2-Ebene, d. h. bis zur Hausmauer verlängert. Aus dem Satteldach wird ein Pultdach EFI´K´. Welche Koordinaten besitzen die Punkte I´ und K´?

2. Der geplante Anbau hat das Aussehen wie in der nebenstehenden Skizze, d. h. er liegt im 1. Oktanden des Koordinatensystems.

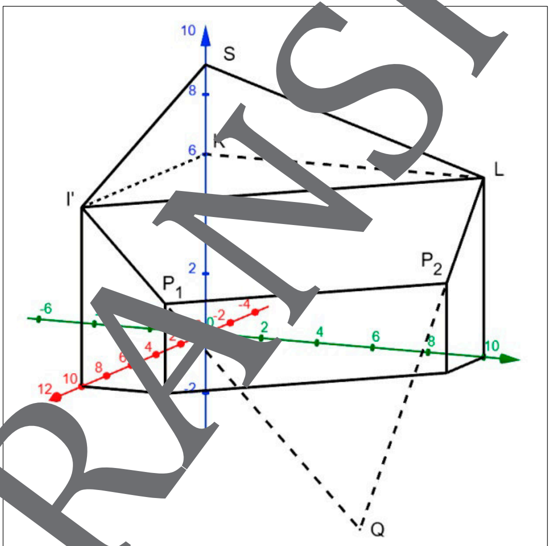

Abb. 2

Gegeben sind die Punkte:
L(0 | 10 | 6), P_1(10 | 3 | 3), P_2(3 | 10 | 3) und S(0 | 0 | 9).
Die Punkte I´(10 | 0 | 6) und K´(0 | 0 | 6) sind die in Teilaufgabe 1g bestimmten Punkte.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Anwendung der Analytischen Geometrie
- Kommunikation: argumentieren und begründen
- Problemlösen: Lösungen angeben
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Geraden- und Ebenengleichungen und deren Anwendung

Autor: Alfred Müller

Lösung

1. a) Aus der Skizze liest man mithilfe der gegebenen Punktkoordinaten ab:
   A(0 | –15 | 0), B(10 | –15 | 0), C(10 | 0 | 0), D(0 | 0 | 0)
   E(0 | –15 | 3). F(10 | –15 | 3), G(10 | 0 | 3), H(0 | 0 | 3),
   I(10 | –5 | 5) K(0 | –5 | 5)

   b) Das Viereck EFIK besitzt die Seitenvektoren bzw. Seitenlängen

   $$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\overrightarrow{EF}\right| = 10 \text{ m und } \overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\overrightarrow{EK}\right| = \sqrt{104} \text{ m}$$

   $\Rightarrow$ Wegen $\overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{EK} = 0 \wedge \left|\overrightarrow{EF}\right| \neq \left|\overrightarrow{EK}\right|$

   $\Rightarrow$ Das Viereck EFIK ist ein Rechteck, aber kein Quadrat.

   Für die Viereckfläche A_V gilt:

   $$A_V = \left|\overrightarrow{EF}\right| \cdot \left|\overrightarrow{EK}\right| = 10 \cdot \sqrt{104} \approx 101{,}98 \text{ m}^2$$

c) Ebene E_1:

$$E_1:\ \vec{x} = \vec{e} + \mu \cdot \overrightarrow{EF} + \rho \cdot \overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Einen Normalenvektor der Ebene E_1 bestimmt man mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren von E_1.

$$\vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 100 \end{pmatrix} = -20 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$E_1:\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} = -15 - 15 = -30$$

$\Rightarrow E_1$: $x_2 - 5x_3 + 30 = 0$

Ebene E_2:

$$E_2:\ \vec{x} = \vec{k} + \sigma \cdot \overrightarrow{KI} + \tau \cdot \overrightarrow{KH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor von E_2 wird wieder mithilfe des Kreuzprodukts bestimmt.

$$\vec{n}_{E2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E_2:\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = -10 + 25 = 15$$

$\Rightarrow E_2$: $2x_2 + 5x_3 - 15 = 0$