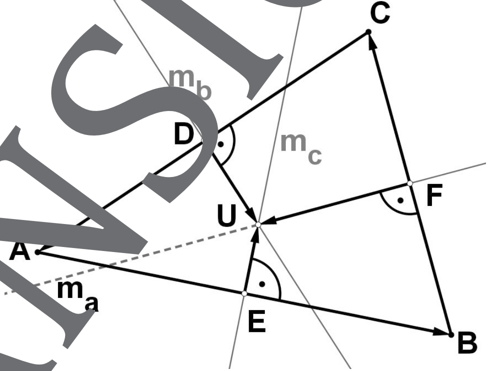
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Anwendung der Vektorrechnung bei elementargeometrischen Aussagen – Teil 1

Beweise mithilfe eines Schemas durchführen

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der [illegible] Gruppe
Rotebühlstraße 77[illegible]
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900[illegible]
Fax +49 71[illegible]-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible] Orth[illegible]
Satz: [illegible]ser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Bildnachweis Titel: Dr. Jürgen Leitz
Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Anwendung der Vektorrechnung bei elementargeometrischen Aussagen – Teil 1

Zu den elementargeometrischen Aussagen gehören u. a. solche über besondere Eigenschaften von Dreiecken und Vielecken. Im Beitrag B.3.2 *Dreieckstransversalen und Eulergerade* wurden die Dreieckstransversalen als besondere Linien im Dreieck mit ihren Eigenschaften (Schnittpunkte und deren Bedeutung) an konkreten Dreiecken zeichnerisch ermittelt und die Ergebnisse rechnerisch mithilfe der Vektorrechnung überprüft und nachgewiesen.
In diesem Beitrag soll die Allgemeingültigkeit dieser Aussagen über Dreieckstransversalen mittels Vektorrechnung auch bewiesen werden.

Die Beweisführung mithilfe der Vektorrechnung erfolgt – wie andere Beweise auch – in drei Schritten:

- Festhalten der **Voraussetzungen**
- Formulieren der **Behauptung**
- Durchführen des **Beweises** (Herleiten der Behauptung aus den Voraussetzungen)

Insbesondere für den Beweis von geometrischen Aussagen ist zusätzlich eine **Skizze** zur Veranschaulichung des Sachverhaltes sehr hilfreich, aber auch zur Findung möglicher Lösungsansätze.
Mittels eines Beweisbeispiels werden diese Schritte erläutert. Für die Beweisführung wird eine Vorlage in Form eines Arbeitsblattes zur Verfügung gestellt, diese kann nach Bedarf kopiert werden.

Ausblick:
In einem zweiten Beitrag werden weitere Beweise von elementargeometrischen Aussagen über Dreiecke und Vierecke behandelt.

Dreieckstransversalen

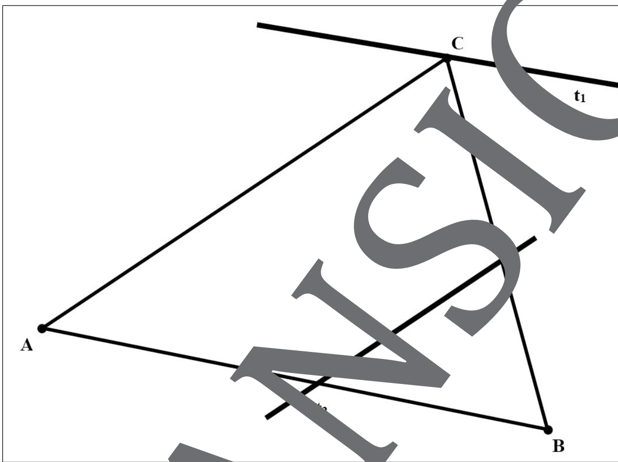


Abb. 1

Dreieckstransversalen sind Geraden, die ein Dreieck schneiden („durchkreuzen“), wobei die Schnittmenge der Geraden und der Dreieckspunkte nicht die leere Menge ist.

Beweisvorlage

Beweise mithilfe von Vektoren und Skalarprodukt

Beweisen Sie folgende Aussage:

Skizze	
Voraus-setzungen	
Behauptung	
Beweis	

Abb. 7

Beweisbeispiel

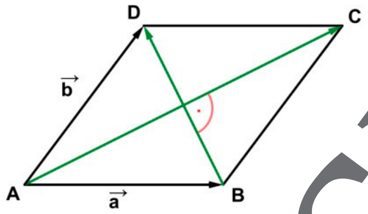
Beweise mithilfe von Vektoren und Skalarprodukt Beweisen Sie folgende Aussage: **Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, dann ist das Viereck eine Raute (ein Rhombus).**	
Skizze	
Voraus-setzungen	$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ (weil $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$)
Behauptung	Das Viereck ABCD ist eine Raute, d. h., alle Seiten sind gleich lang. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \lvert\overrightarrow{DA}\rvert$
Beweis	Für die Diagonalen gilt: $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ $\Leftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \vec{a} \circ \vec{b} = 0$ $\Leftrightarrow \quad \vec{b}^2 - \vec{a}^2 = 0 \qquad \lvert + \vec{a}^2$ $\Leftrightarrow \quad \lvert\vec{b}\rvert^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2 \qquad \lvert \sqrt{}$ $\Leftrightarrow \quad \lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \qquad$, weil $\lvert\vec{b}\rvert, \lvert\vec{a}\rvert > 0$ Da $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (nach Voraussetzung) ist, folgt daraus die Behauptung. Also sind alle vier Seiten gleich lang und das Parallelogramm ist eine Raute (ein Rhombus). (w. z. b. w.)

Abb. 3

Aufgaben zu den Höhen im Dreieck

Von einem Dreieck ABC sind folgende Eckpunkte gegeben:
$A(-8 \mid 0)$, $B(7 \mid -3)$ und $C(4 \mid 8)$

1. a) Zeichnen Sie die Punkte in das beigefügte Koordinatensystem (Abb. 6) ein und verbinden diese zum Dreieck ABC.

   b) Zeichnen Sie mithilfe des Geodreiecks die drei Höhen.
   (Zur Kontrolle: Die Fußpunkte der Höhen h_a, h_b und h_c lauten: $D(1 \mid 6), E(2 \mid -2)$ und $F(5,2 \mid 3,6)$).

   c) Die drei Höhen schneiden sich in genau einem Punkt H. Geben Sie die Koordinaten des Höhenschnittpunktes an.

2. a) Stellen Sie für die drei Seiten und Höhen des Dreiecks ABC die Geradengleichungen in Parameterform auf.
   Hinweis: Beachten Sie, dass eine Höhe auf der jeweiligen Seite orthogonal (senkrecht) steht und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt geht.

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Fußpunktes E der Höhe h_c mithilfe der Vektorrechnung und vergleichen Sie diese mit den in Teilaufgabe 1b) abgelesenen Werten.

   c) **Zusatz:** Berechnen Sie die Koordinaten der Fußpunkte der beiden anderen Höhen und vergleichen Sie diese mit den Teilaufgabe 1b) abgelesenen Werten.

3. a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes H vektoriell und vergleichen diese mit dem unter Teilaufgabe 1c) abgelesenen Werten.
   Hinweis: Da sich die drei Höhen in genau einem Punkt schneiden, genügt es, wenn Sie entsprechend zwei Geraden zum Schnitt bringen. Verwenden Sie hierfür die in Teilaufgabe a) aufgestellten Gleichungen.

   b) Das Verhältnis (Quotient) der Längen zweier Höhen ist umgekehrt proportional (antiproportional) zum Längenverhältnis der entsprechenden Seiten. Weisen Sie dies rechnerisch für das Dreieck ABC nach.

   c) **Beweisen** Sie vektoriell folgende Aussage:
   Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich genau in einem Punkt.
   Hinweis: Orientieren Sie sich dazu am Beweisbeispiel Abb. 8

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: –
- Kommunikation: begründen, argumentieren, Vermutungen äußern, präsentieren
- Problemlösen: Probleme erkunden, Probleme zerlegen, Beweis führen
- Modellierung: –
- Medien: Farbfolie, GeoGebra
- Methode: Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Elementargeometrie, orthogonal, Skalarprodukt, Dreieck, Viereck, Trapez, Raute, Drachenviereck, Parallelogramm, Diagonalen, Mittelsenkrechte, Höhe, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende , Radius, Inkreis, Umkreis, Schwerpunkt, Voraussetzung, Behauptung, Beweis

Autor: Dr. Jürgen Leitz

Lösung

Aufgaben zu den Höhen im Dreieck

1. a) und b)

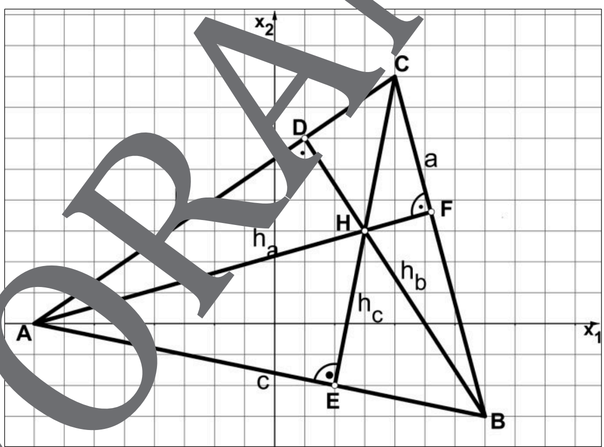


Abb. 9

c) $H(3 \mid 3)$

2. a) **Geradengleichungen der Dreiecksseiten**

Seite a (g_a):

$$\vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Seite b (g_b):

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Seite c (g_c):

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Geradengleichungen der Höhen

Die Höhen stehen senkrecht auf den Dreiecksseiten. Damit sind ihre Richtungsvektoren die Normalenvektoren der Seitengeraden (das Skalarprodukt aus Höhen- und Seitenvektor ist null). Mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ da } \vec{u} \circ \overrightarrow{n_a} = 0$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ da } \vec{v} \circ \overrightarrow{n_b} = 0$$

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ da } \overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{n_c} = 0$$

Die Gleichungen für die Höhen lauten somit:

Höhe h_a (Gerade h_a): $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r_1 \cdot \overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$

Höhe h_b (Gerade h_b): $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s_1 \cdot \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Höhe h_c (Gerade h_c): $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + t_1 \cdot \overrightarrow{n_c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) **Fußpunkt E der Höhe h_c**

Der Fußpunkt E ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Geraden g_c mit der Geraden h_c $\left(g_c \cap h_c\right)$:

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

LGS aufstellen: $\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 15 \cdot t - \quad t_1 = 12 \\ \mathrm{II} & -3 \cdot t - 5 \cdot t_1 = \quad 8 \end{array}$

$\mathrm{II} \cdot 5 + \mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{III} \quad -26 \cdot t_1 = 52 \quad \Rightarrow t_1 = -2$

$t_1 = -2$ in I einsetzen: $15 \cdot t - (-2) = 12 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

$t = \frac{2}{3}$ bzw. $t_1 = -2$ in die entsprechende Geradengleichung eingesetzt

liefert: $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow E(2 \mid -2)$ (Übereinstimmung mit Teilaufg 1b)).

c) **Zusatz**

Fußpunkt $F\left(g_a \cap h_a\right)$:

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$

LGS aufstellen: $\begin{array}{ll} \mathrm{I} & -3 \cdot r - 11 \cdot r_1 = -15 \\ \mathrm{II} & 11 \cdot r - \ 3 \cdot r_1 = \quad 3 \end{array}$

$\mathrm{I} \cdot 11 + \mathrm{II} \cdot 3 \Leftrightarrow \mathrm{III} \quad -130 \cdot r_1 = -156 \quad \Rightarrow r_1 = \frac{6}{5}$

$r_1 = \frac{6}{5}$ in I einsetzen: $-3 \cdot r - 11 \cdot \frac{6}{5} = -15 \Rightarrow r = \frac{3}{5}$ $r = \frac{3}{5}$ bzw. $r_1 = \frac{6}{5}$

in die entsprechende Geradengleichung eingesetzt liefert: $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 5,2 \\ 3,6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F(5,2 \mid 3,6)$ (Übereinstimmung mit Teilaufg. 1b)).