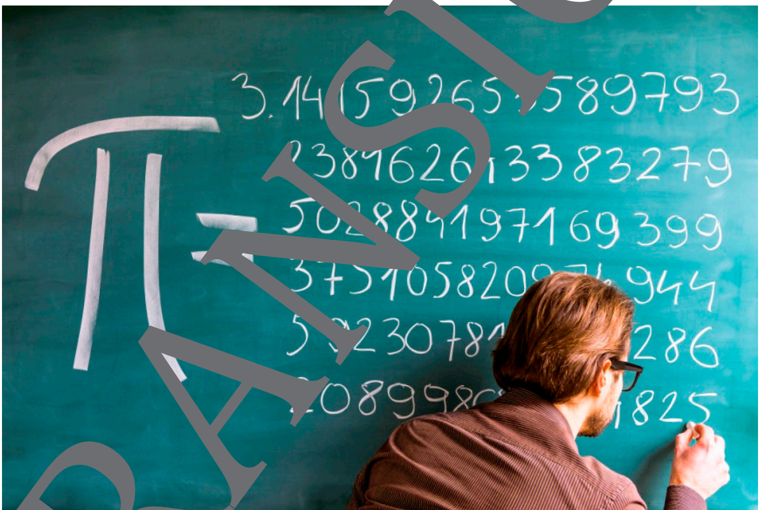
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Zur Geschichte der Zahl π

Ein kurzes Lesebuch

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: S[illegible] Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: domin_domin/iStock/Getty Images Plus
Bildnachweis Titel: Mona Hitzenauer
Lektorat: Mona Hitzenauer

Zur Geschichte der Zahl π

Das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser eines Kreises ist seither ein spannendes Thema. Die drei großen mathematischen Probleme des Altertums, die Quadratur des Kreises (Umwandlung einer Kreisfläche in ein flächengleiches Quadrat), die Dreiteilung eines Winkels und die Verdopplung eines Würfels, sind noch in aller Munde, obwohl man weiß, dass sie (mit Zirkel und Lineal) nicht lösbar sind. Deshalb ist im Folgenden ein kurzer Abriss der Entwicklung der Bestimmung dieser Verhältniszahl π (Pi) angegeben, wobei nicht alle angegebenen Punkte besprochen werden müssen.
Im Beitrag werden Schwerpunkte abgebildet, da nicht alle Entwicklungen berücksichtigt werden können. Beispielsweise wird nicht auf den Pi-Tag, der in den USA (und auch in Österreich) gefeiert wird, eingegangen. Der 14. März wird in der amerikanischen Schreibweise zu 3.14, besonders mit der Uhrzeit 1 Uhr 59 Min und 26 Sek erhält man mit 3.1415926 eine gute Näherung für π. Nicht berücksichtigt wird darüberhinausgehend die Bedeutung von π in Musik und Kunst sowie die Suche nach außerirdischer Intelligenz, nicht der genaue Nachweis von Irrationalität und Transzendenz, nicht die Weltrekordversuche des Merkens von mehr als 70 000 Nachkommastellen, nicht das mehrmalige, aber planlose Auftreten von bestimmten Zahlenfolgen, wie z. B. 123456 unter den Nachkommastellen, nicht das Bemühen einzelner US-Staaten der genauen Festlegung von π.
Die Benennung der Zahl π als solche nach dem griechischen
περιφερια = peripheria = Kreisumfang wird im 17. Jhd. Von *W. Jones*, *I. Borrow* und *W. Oughtred* erstmals angegeben, durchgesetzt hat sie sich erst im 18. Jhd. In den Werken von *L. Euler*.

Literaturangaben

Bartsch, Hans-Jochen: Mathematische Formeln, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1991.

Bronstein, Ilja, Semendjajew, Konstantin: Taschenbuch der Mathematik, B. G. Teubner Verlag Leipzig, 1990.

Hentze, Rudolf, v. Hanxleden, Eberhard: Mathematik für höhere Lehranstalten, Mittelstufe Geometrie, Vieweg-Verlag Braunschweig 1962.

Kratz, Johannes, Wörle, Karl: Geometrie 2, Bayerischer Schulbuchverlag, München, 1970.

MNU Zeitschrift Heft 4/2001

Kompetenzprofil

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geschichte der Zahl π
- Kommunikation: darlegen
- Problemlösen: Lösungen vortragen
- Modellierung: Angabe des jeweiligen Modells
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit
- Inhalt in Stichworten: kurzer Einblick in die Geschichte der Zahl π

Autor: Alfred Müller

1. Der Kreisumfang

Die Menschheit beschäftigte schon immer die Frage, wie man bei gegebenen Kreisumfang den Durchmesser bestimmt. So findet man schon in der Bibel im 1. Buch der Könige, Kapitel 7,Vers 23 folgenden Text:

„Hierauf fertigte er ein kreisrundes Becken an, das von einem Rand bis zum anderen 10 Ellen maß, (d.h. d = 10), wobei eine Schnur von 30 Ellen (d.h. U = 30) es umspannte.“

Damit ist das Maß für das Verhältnis: $\frac{U}{d} = 3$

Will man bei beliebigen Kreisen den Umfang aus dem Durchmesser bestimmen, so benötigt man eine Formel.
Alle Kreise sind ähnlich. Das Verhältnis von Umfang und Durchmesser ist dadurch bei allen Kreisen gleich.
Es gilt:

$$\frac{U}{d} = \pi \quad \Rightarrow \quad U = d \cdot \pi$$

Ersetzt man d durch 2r so erhält man die Umfangsformel:

$U = 2 \cdot r \cdot \pi$

2. Der Wert der Zahl π

Man sieht leicht ein, dass der Umfang eines einbeschriebenen Vielecks kürzer ist als der Kreisumfang, denn eine Strecke ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte (siehe Abb. 1).
Beim (gezeichneten) Verdoppeln der Eckenzahl wird der Umfang des Umbeschriebenen Vielecks größer als der Umfang des Kreises (siehe Abb. 2).
Allgemein gilt, dass der Umfang des dem Kreis einbeschriebenen Vielecks kleiner, der des umbeschriebenen Vielecks größer als der Umfang des Kreises ist.
Das sieht man am besten bei der Verdopplung der Eckenzahl der Vielecke.

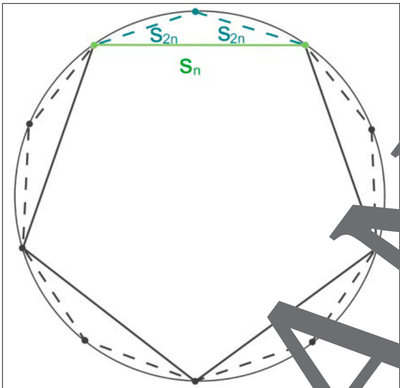


Abb. 1

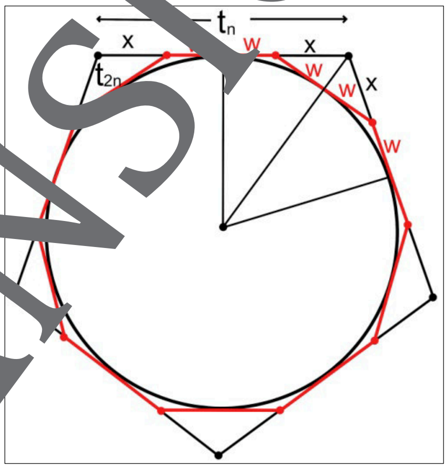


Abb. 2

$s_n < 2 s_{2n}$
$ns_n < 2n s_{2n}$

$\Rightarrow u_n < u_{2n}$

$t_{2n} = 2w < 2x$
$t_n = 2(w + x) > t_{2n}$
$nt_n > 2nt_{2n}$
$\Rightarrow v_n > v_{2n}$

Aus den obigen Ungleichungen gilt z. B.:

$u_6 < u_{12} < u_{24} < u_{48} < u_{96} < \ldots < u < \ldots. < v_{96} < v_{48} < v_{34} < v_{12} < v_{12} < v_6$

Wert aus dem goldenen Schnitt:

$$\pi \approx \frac{6}{5}\left(2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right) \approx 3{,}141640\ldots$$

Weitere Werte für π stammen von *Apollonius von Perge, Hipparch* und *Ptolemäus.*
Leonardo von Pisa oder *Leonardo Fibonacci (ca. 1170–1250 n. Chr.)* geben als Näherungswert an:

$$\pi \approx \left(12^2 \cdot 10\right) : 458\frac{1}{3} \approx 3{,}141818\ldots$$

Ptolemäus gab einen Näherungswert von π im 60er-System an.

$$\pi \approx \frac{3°8'30''}{1°} = \frac{188'30''}{60'} = \frac{188{,}5'}{60'} \approx 3{,}141666\ldots$$

e) Chinesischer Wert (um 500 n. Chr.):
Der Kettenbruchwert gibt π an, selbst wenn man den Wert für

$d \approx \frac{1}{292}$ vernachlässigt.

$$\pi \approx 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+d}}}$$

$$\Rightarrow\ \pi \approx 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}} = 3+\frac{15}{106} = 3{,}141509\ldots$$

Weitere Kettenbruchentwicklungen sind z. B.

$$\pi \approx \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{\ldots}}}}} \qquad \frac{\pi}{4} \approx \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{\ldots}}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} \approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cfrac{4}{....}}}}} \qquad \frac{4}{\pi} \approx 1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{....}}}}}$$

f) Eine ausgezeichnete Näherung findet der chinesische Mathematiker *Zu-Chong-Zhi* (430 bis 501 n. Chr.), der in den bekannten Brüchen $\frac{370}{120}$ (*Ptolemäus*) und $\frac{22}{7}$ (*Archimedes*) einfach die Zähler und die Nenner subtrahiert. Er bildete:

$$\pi \approx \frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113} \approx 3{,}1415929\ldots$$

g) Vieta-Wert:

$$\pi \approx 1{,}8+\sqrt{1{,}8} = 3{,}141640\ldots$$

Konstruktion:
Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 1,2 und 0,6 liefert diesen Wert.

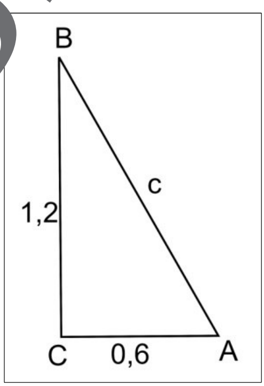


Abb. 3

$$c = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}6^2} = \sqrt{1{,}8}$$

$$U_{\Delta} = \sqrt{1{,}8} + 1{,}2 + 0{,}6 = \sqrt{1{,}8} + 1{,}8 \approx \pi$$

h) Wesentlich genauere Werte für π sind von arabischen Mathematikern überliefert. Den für die damalige Zeit genauesten Wert findet man in einer Arbeit des Gamsid ben Mas ud ben Mahmud al-Kasani, der im 15.Jahrhundert in Samarkand wirkte. Er gibt π sowohl im Sechsersystem als auch im Zehnersystem mit einer Genauigkeit von 16 Stellen an.

1427 arbeitete der arabische Astronom Al-Kasi mit dem $6\cdot 2^{27}$-Eck und erhält auf 16 Stellen genau den Wert:

$$\pi \approx 3.1415926653589\ldots$$

(2) Eine weitere Näherungskonstruktion stammt von dem *Franzosen Pioche (1818)*:

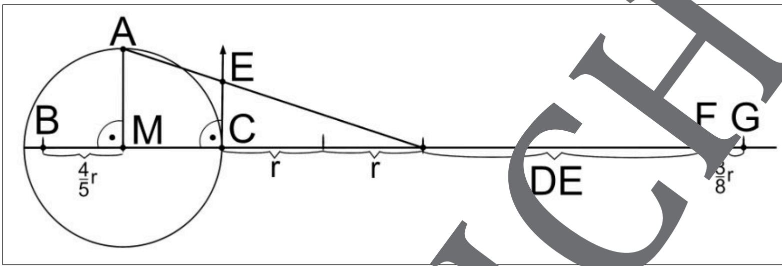


Abb. 6

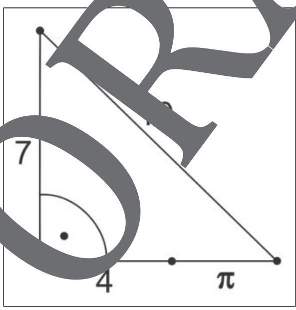
$$\overline{AD} = r\sqrt{10},\ \ \overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}r\cdot\sqrt{10}$$

$$\overline{BG} = 4\frac{7}{40}r + \overline{DE} = 6{,}283185\ldots r = 2r\pi$$

$$\Rightarrow \pi = 3{,}141592\ldots$$

Die nächsten beiden Konstruktionen hat der deutsche Mathematiker *StD Dieter Götzl,* München gefunden:

(3) In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c = 10 und der Kathete a = 7 erhält man eine Näherung für π gemäß der folgenden Skizze.



$$7^2 + (4+\pi)^2 = 10^2$$

$$(4+\pi)^2 = 10^2 - 7^2$$

$$4+\pi = \sqrt{10^2 - 7^2}$$

$$\pi \approx \left(\sqrt{10^2 - 7^2}\right) - 4$$

$$\approx \sqrt{51} - 4 \approx 3{,}141428\ldots$$

Abb. 7