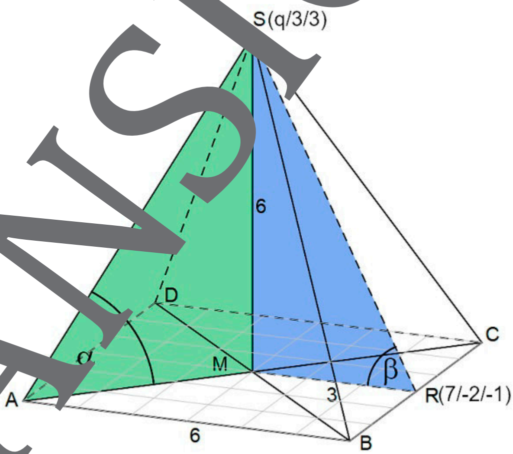
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Vermischte Übungen: Punkt, Winkel und Symmetrie

Kurztest

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Mona Hitzenauer
Bildnachweis Titel: Mona Hitzenauer
Korrektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Name: ______________________ **Klasse:** ____________ **Datum:** _________

Vermischte Übungen: Punkt, Winkel und Symmetrie

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte
   A (4 |– 2 | 5), B (8 | – 4 | 1) und D (2 | 2 | 1) und die Gerade
   g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \rho \in \mathbb{R}$ gegeben.

   a) Die Punkte A, B und D legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform. ___/4 P

   b) Die Gerade g schneidet die Ebene E im Punkt C unter dem Winkel φ. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C sowie die Maßzahl des Winkels φ. ___/5 P

   c) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenklig und rechtwinklig ist und dass der Punkt C dieses Dreieck zu einem Viereck ABCD ergänzt. Welcher Art ist das Viereck ABCD? ___/5 P

   d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Vierecks ABCD sowie dessen Flächeninhalt. ___/4 P

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: begründen
- Problemlösen: Lösungen erarbeiten
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit
- Inhalt in Stichworten: Punkt, Gerade, Ebene, Winkel, Symmetrie, Pyramide

Autor: Alfred Müller

Lösung

1. A (4 | – 2 | 5), B (8 | – 4 | 1), D (2 | 2 | 1), g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   a) Ebene E durch die Punkte A, B, D:

   $$E:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   Einen Normalenvektor der Ebene E kann man mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen.

   $$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$E:\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 8 - 4 + 5 = 9$$

   $\Rightarrow$ E: $2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9 = 0$

b) Schnittpunkt C der Geraden g mit der Ebene E:
g in E:

$2(8 + \rho) + 2(2 + \rho) + (1 + 2\rho) - 9 = 0$
$16 + 2\rho + 4 + 2\rho + 1 + 2\rho - 9 = 0$
$6\rho + 12 = 0 \Rightarrow \rho = -2 \Rightarrow C\,(6 \mid 0 \mid -3)$

Winkel φ zwischen der Geraden g und der Ebene E:
Der spitze Winkel φ ist derjenige Winkel, der den Winkel zwischen dem Normalenvektor von E und dem Richtungsvektor von g zu 90° ergänzt.

Es gilt:

$$\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi = \frac{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{2+2+2}{3\sqrt{6}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \varphi \approx 54{,}74°$$

c) **Dreieck ABD**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = 6\ \text{LE};\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = 6\ \text{LE}$$

⇒ Dreieck ABD gleichschenklig.
Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = -8 - 8 + 16 = 0$ ist das Dreieck ABD bei A rechtwinklig.
⇒ Das Dreieck ABD ist gleichschenklig und rechtwinklig.

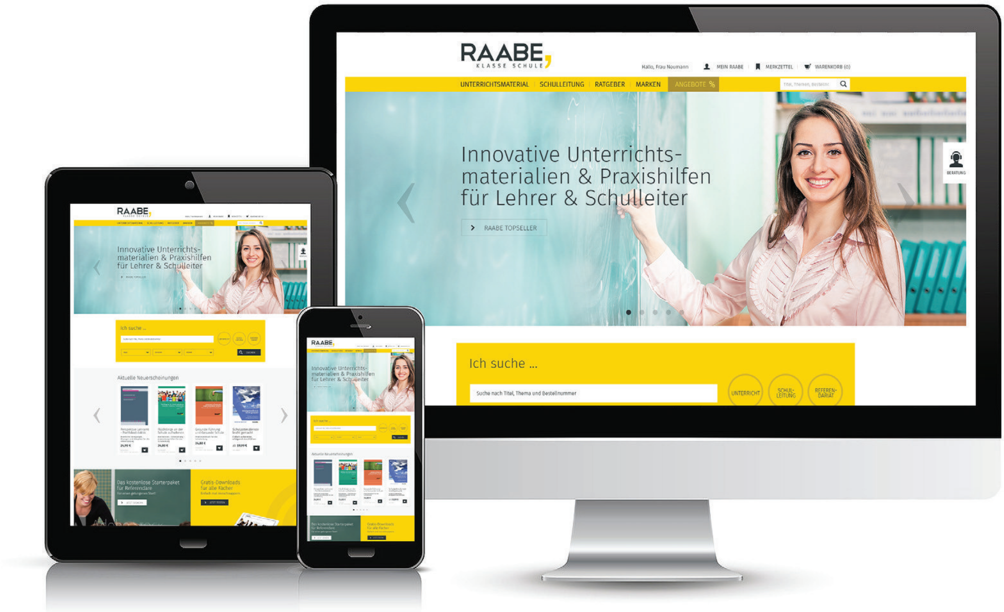
Viereck ABCD

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

⇒ Das Viereck ABCD ist ein Quadrat, weil alle vier Seiten gleich lang (6 LE) und alle Winkel gleich groß (90°) sind.

RAABE,
KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de