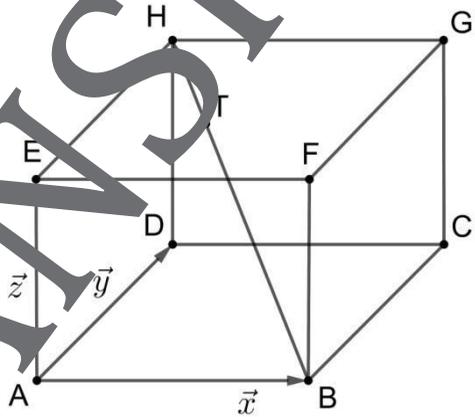


UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

linear unabhängige Vektoren und Teilverhältnisse

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 50b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH teilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassenstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmaterialien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, in öffentlichen Netzwerken eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte überprüft und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett-Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900
Fax +49 711 629060
meinRAABe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth

Satz: Klett-MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe

Illustrationen: Schirin Orth

Bildnachweise: Titel: Schirin Orth

Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

Linear unabhängige Vektoren und Teilverhältnisse

1. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ spannen das Parallelogramm $AFCD$ auf. Der Punkt E teilt die Strecke $[DC]$ im Verhältnis 1 : 3. In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt S der Strecke $[BE]$ mit der Diagonale $[AC]$ diese Diagonale?
2. In einem Dreieck ABC mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ teilt der Punkt T die Seite $[AC]$ im Verhältnis $|\overrightarrow{AT}| : |\overrightarrow{TC}| = 3 : 4$. Berechnen Sie das Verhältnis, in dem die vom Punkt C ausgehende Seitenhalbierende $[CM]$ die Strecke $[BT]$ teilt.
3. Der Punkt T teilt wie in der nebenstehenden Skizze die Strecke $[BC]$ im Verhältnis 3 : 2. Berechnen Sie das Verhältnis, in dem die Seitenhalbierende $[BM]$ die Strecke $[AT]$ teilt.

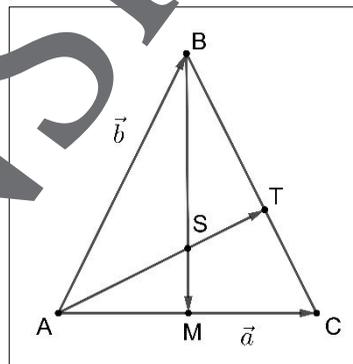


Abb. 1

4. Gegeben ist ein ebenes Viereck ABCD

mit $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Für die Diagonale $[AC]$ gilt: $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

- a) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.
- b) In welchem Verhältnis teilen sich die beiden Diagonalen des Trapezes ABCD?

Rechnen mit Vektoren

- In einem Spat ABCDEFGH mit $\overline{AB} = \vec{x}$, $\overline{AD} = \vec{y}$, $\overline{AE} = \vec{z}$ liegt der Punkt T auf der Diagonalen [BH] so, dass $\overline{BT} = 3 \cdot \overline{TH}$ gilt. Bestimmen Sie die Abhängigkeit von \vec{x} , \vec{y} und \vec{z} den Vektor \overline{AT} .
- In einem Spat ABCDEFGH mit $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$, $\overline{AE} = \vec{c}$ gilt für einen Punkt P auf der Diagonalen [AG] die Gleichung $\overline{AP} = \frac{1}{3} \overline{AG}$. M ist der Mittelpunkt der Strecke [EH]. Bestimmen Sie die Abhängigkeit von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} den Vektor \overline{MP} .
- In einem Spat ABCDEFGH mit $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$, $\overline{AE} = \vec{c}$ gilt für die Punkte C_1 bzw. W: $\overline{AC_1} = \frac{1}{3} \overline{AE}$, $\overline{FW} = \frac{4}{5} \overline{FG}$. Bestimmen Sie die Vektoren $\overline{C_1W}$ und \overline{BM} , wenn M der Mittelpunkt der Strecke $[C_1W]$ ist.
- Ein Spat ABCDEFGH ist durch die Vektoren $\vec{a} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overline{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \overline{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren \overline{AG} , \overline{FD} , \overline{CE} , \overline{GM} , wenn M der Mittelpunkt der Kante [AP] ist.
- Die vier Punkte A, B, C, D bilden ein Parallelogramm. Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt M der Geraden $g = AC$ und $h = BD$ der Mittelpunkt der Diagonalen [AC] und [BD] ist.
- Im Dreieck ABC sind M_1 , M_2 , M_3 die Seitenmitten. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S' des Dreiecks $M_1M_2M_3$. Was fällt auf?

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: argumentieren
- Problemlösen: Probleme erkennen und Lösungen finden
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Prinzip der linearen Unabhängigkeit von Vektoren, Rechnen mit Vektoren im Raum und in der Ebene

Autor: Alfred Müller

Lösung**Linear unabhängige Vektoren und Teilverhältnisse**

$$1. \quad \overline{AB} = \vec{a}, \overline{AD} = \vec{b}, \overline{CE} = \frac{3}{4}\overline{CB} = \frac{3}{4}(\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow \overline{DE} = \frac{3}{4}\vec{a}, \overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

Geschlossene Vektorkette:

$$\overline{AB} + \overline{BS} + \overline{SA} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + m \cdot \left(\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} \right) - k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}m + k \right) + \vec{b} \cdot (m - k) = \vec{0}$$

Da \vec{a} , \vec{b} linear unabhängig, folgt:

$$1. \quad 1 - \frac{3}{4}m + k = 0$$

$$2. \quad m - k = 0$$

aus 2: $m = k$

$$1. \quad 1 - \frac{3}{4}m = 0 \Rightarrow m = k = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow \text{Teilverhältnis: } |\overline{AS}| : |\overline{SC}| = 4 : 3$$

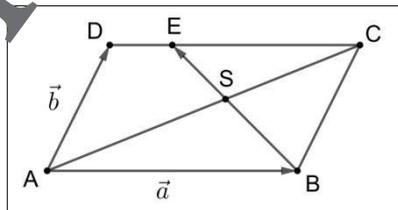


Abb. 2

$$2. \quad \overline{AB} = \vec{a}, \overline{AC} = \vec{b}, \overline{AT} = \frac{3}{4}\vec{b}, \overline{AM} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overline{BC} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$$\overline{CM} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}, \overline{TB} = -\frac{3}{7}\vec{b} + \vec{a}$$

Geschlossene Vektorkette:

$$\overline{AM} + \overline{MS} + \overline{ST} + \overline{TA} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} - k \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) - m \cdot \left(-\frac{3}{7}\vec{b} + \vec{a}\right) - \frac{3}{7}\vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k - m\right) + \vec{b} \cdot \left(k + \frac{3}{7}m - \frac{3}{7}\right) = \vec{0}$$

Da die Vektoren \vec{a} , \vec{b} linear unabhängig sind

$$1. \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k - m = 0$$

$$2. \quad -\frac{3}{7} + k + \frac{3}{7}m = 0$$

$$1+2: \quad \frac{4}{7} - \frac{11}{7}m = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{11}$$

$$\text{in 1: } \frac{1}{2} - \frac{4}{11} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{4}{11}$$

$$\Rightarrow \text{Teilverhältnisse: } |\overline{CS}| : |\overline{SM}| = 7 : 4, \quad |\overline{CS}| : |\overline{SM}| = 8 : 3$$

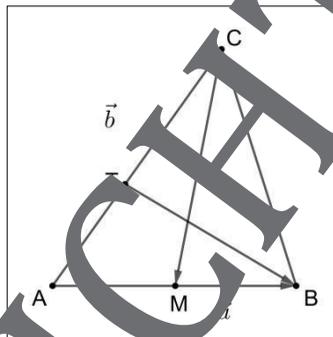


Abb. 1

$$3. \quad \overline{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} \Rightarrow \overline{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overline{CT} = \frac{2}{5}\overline{CB} = \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\Rightarrow \overline{AT} = \vec{a} + \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

Geschlossene Vektorkette:

$$\overline{AS} + \overline{SM} + \overline{MA} = \vec{0}$$

$$k \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \right) + m \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \left(\frac{3}{5}k + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \right) + \vec{b} \cdot \left(\frac{2}{5}k - m \right) = \vec{0}$$

Da die Vektoren \vec{a} , \vec{b} linear unabhängig sind, folgt:

$$1. \quad \frac{3}{5}k + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0$$

$$2. \quad \frac{2}{5}k - m = 0$$

$$\text{aus 2: } m = \frac{2}{5}k \text{ in 1: } \frac{3}{5}k + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}k - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{8} \wedge m = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Teilverhältnisse: } |\overline{AS}| : |\overline{AT}| = 5 : 3 \wedge |\overline{BS}| : |\overline{SM}| = 3 : 1$$

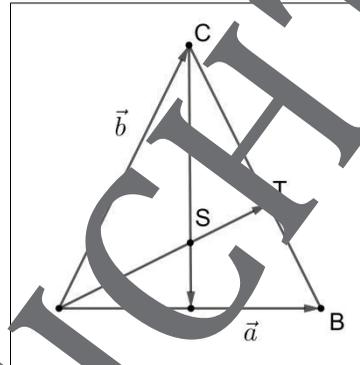


Abb. 4

Rechnen mit Vektoren

$$1. \quad \overrightarrow{BT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BH} = \frac{3}{4}(-\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$$

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$$

$$= \vec{x} - \frac{3}{4}\vec{x} + \frac{3}{4}\vec{y} + \frac{3}{4}\vec{z}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AT} = \frac{1}{4}\vec{x} + \frac{3}{4}\vec{y} + \frac{3}{4}\vec{z}$$

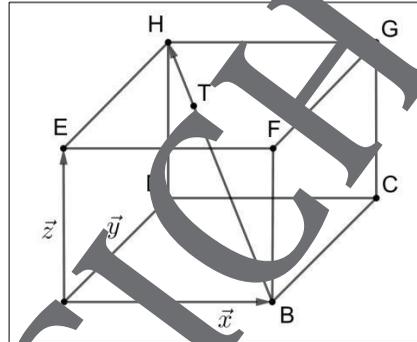


Abb. 1

$$2. \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$$

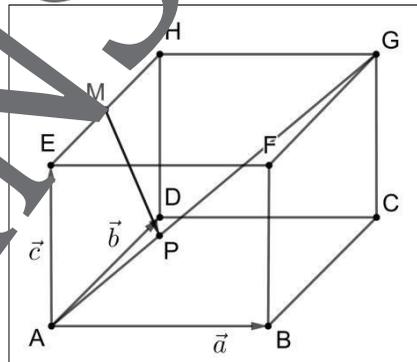


Abb. 2

Dieses Werk ist Bestandteil der Reihe RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß §60b UrhWissG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung herunterzuladen, zu speichern und in Klassensatzstärke auszudrucken. Jede darüber hinausgehende Nutzung sowie die Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig. Darüber hinaus sind Sie nicht berechtigt, Copyrightvermerke, Markenzeichen und/oder Eigentumsangaben des Werks zu verändern.

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de