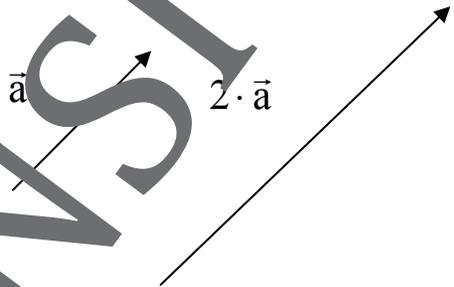


UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



\vec{a} $2 \cdot \vec{a}$

Kollinearität, Linearkombination und Komplanarität

Definitionen und Aufgaben

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 1 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung und gedruckte musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

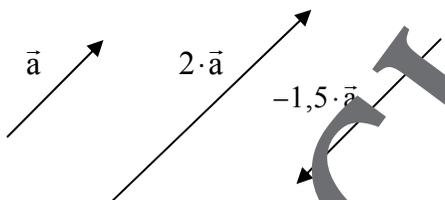
Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 6290-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAabe@raabe.de
www.raabe.de

Produktion: Mirin Orth
Satz: Gösser Medien GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Nachweis Titel: Dr. Jürgen Leitz
Lektorat: Julia Hitznauer

Kollinearität, Linearkombination und Komplanarität

Kollinearität



Definition

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind genau dann kollinear (linear abhängig), wenn einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist:

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a} \text{ mit } k \neq 0$$

Geometrisch bedeutet das, dass die Vektoren (anti-)parallel sind.
Kollinearität steht im Zusammenhang mit dem Begriff der Linearkombination.

Linearkombination – Vektorzug/Vektorkette

Geometrisch bedeutet eine Linearkombination die Aneinanderreihung von Vektoren, die auch als Addition/Subtraktion von Vektoren angesehen werden können und als **Vektorzug/Vektorkette** bezeichnet wird.

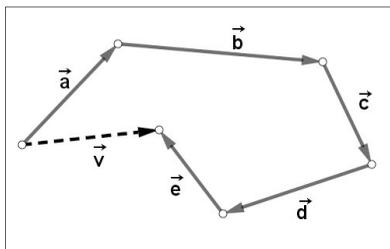


Abb. 1

Ist in einem Vektorzug/einer Vektorkette der Vektor \vec{v} ein Nullvektor $\vec{0}$

($\vec{v} = \vec{0}$), dann ist die Vektorkette eine **geschlossene Vektorkette** (Anfangs- und Endpunkt der Kette fallen zusammen).

Beispiel: geschlossene Vektorkette mit vier Vektoren:

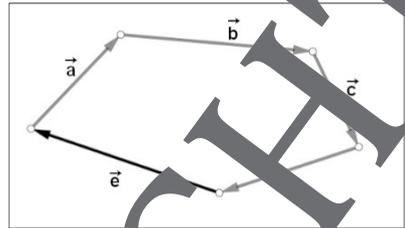


Abb. 2

$$k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \cdot \vec{c} + k_4 \cdot \vec{d} = \vec{v} = \vec{0}$$

Definition

Eine Linearkombination von Vektoren ist ein Vektor, der sich durch Skalarmultiplikation und Vektoraddition von gegebenen Vektoren darstellen lässt:

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \cdot \vec{c} + \dots + k_n \cdot \vec{z} \quad \text{mit } k_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

Die Untersuchung zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} auf Kollinearität kann auch mithilfe der Linearkombination erfolgen:

Definition

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind genau dann **kollinear** (linear abhängig), wenn es genau zwei reelle Zahlen k_1 und k_2 gibt, die nicht beide null sind, sodass gilt:

$$k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} = \vec{0} \quad \text{mit } k_1 \wedge k_2 \neq 0 \quad \text{und } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Existiert für die Vektorgleichung nur die triviale Lösung $k_1 = k_2 = 0$, so sind die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} **nicht kollinear**, also **linear unabhängig**.

Koplanarität

Definition

Drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} im dreidimensionalen Raum heißen **koplanar** (linear abhängig) genau dann, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt:

$$\vec{c} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} \quad \text{mit } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Geometrisch bedeutet das, dass die drei Vektoren in einer Ebene liegen.

Aufgaben

1. Stellen Sie fest, ob die beiden Vektoren kollinear (linear abhängig) oder nicht kollinear sind.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ -2,0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,6 \\ -2,4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Zeigen Sie, dass der Vektor \vec{c} als Linearkombination der beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} dargestellt werden kann.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: Vermutungen kommunizieren
- Problemlösen: begründen, argumentieren
- Modellierung: --
- Medien: --
- Methode: Einzel-, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Kollinearität, Linearkombination, Vektorzug, Vektorkette, geschlossene Vektorkette, Komplanarität, LGS

Autor: Dr. Jürgen Leitz

Lösung

1. Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig (kollinear), wenn einer der beiden Vektoren als Vielfaches des anderen dargestellt werden kann:

$$\vec{a} = r \cdot \vec{b} \text{ bzw. } \vec{b} = s \cdot \vec{a}$$

a) $\begin{pmatrix} 1,6 \\ -2,0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2,8 \\ -3,5 \end{pmatrix}$ Vektorgleichung

I $1,6 = 2,8 \cdot r$

II $-2,0 = -3,5 \cdot r$

Aus I folgt: $r = \frac{1,6}{2,8} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

Aus II folgt: $r = \frac{-2,0}{-3,5} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{4}{7} \cdot \vec{b}$

\vec{a} und \vec{b} sind kollinear.

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } 4 = -6 \cdot r \Rightarrow r = -\frac{2}{3}$$

$$\text{II } 3 = -4 \cdot r \Rightarrow r = -\frac{3}{4}$$

\Rightarrow Das LGS ist nicht lösbar.

\Rightarrow \vec{c} und \vec{d} sind nicht kollinear.

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,6 \\ -2,4 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } -4 = 4,8 \cdot r \Rightarrow r = -\frac{5}{6}$$

$$\text{II } 3 = -3,6 \cdot r \Rightarrow r = -\frac{5}{6}$$

$$\text{III } 2 = -2,4 \cdot r \Rightarrow r = -\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \vec{e} = -\frac{5}{6} \cdot \vec{f}$$

\Rightarrow \vec{e} und \vec{f} sind kollinear.

$$\text{d) } \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } -3 = 6 \cdot r \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$$\text{II } 1 = 2 \cdot r \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\text{III } 2 = -4 \cdot r \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

\Rightarrow Das LGS ist nicht lösbar.

\Rightarrow \vec{g} und \vec{h} sind nicht kollinear.

5.

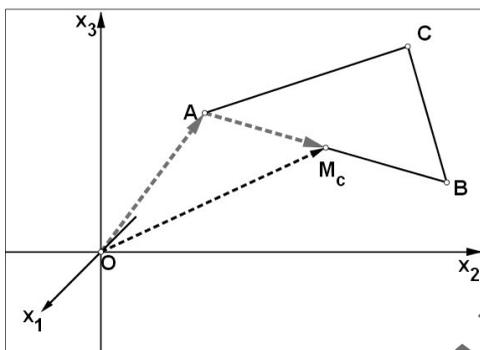


Abb. 3

Da M_c Mittelpunkt der Seite c ist, gilt $\vec{OM}_c = \vec{OA} + 0,5 \cdot \vec{AB}$.

Mit $\vec{OA} + 0,5 \cdot \vec{AB} = \vec{OM}_c$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_c (1 \mid 2 \mid -1,5)$$

Analog gilt dann:

Mit $\vec{OC} + 0,5 \cdot \vec{CB} = \vec{OM}_a$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_a (3 \mid 2 \mid -2,5)$$

Mit $\vec{OA} + 0,5 \cdot \vec{AC} = \vec{OM}_b$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_b (1 \mid 2 \mid -3)$$

Dieses Werk ist Bestandteil der Reihe RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß §60b UrhWissG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung herunterzuladen, zu speichern und in Klassensatzstärke auszudrucken. Jede darüber hinausgehende Nutzung sowie die Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig. Darüber hinaus sind Sie nicht berechtigt, Copyrightvermerke, Markenzeichen und/oder Eigentumsangaben des Werks zu verändern.

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de