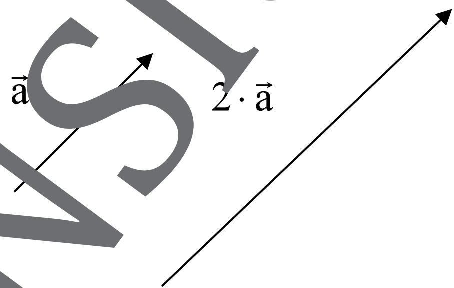
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Kollinearität, Linearkombination und Komplanarität

Definitionen und Aufgaben

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

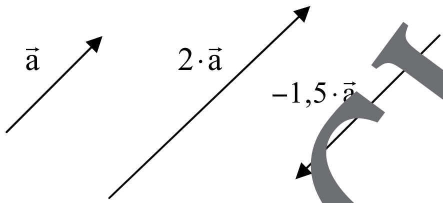
RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Shirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Bildnachweis Titel: Dr. Jürgen Leitz
Lektorat: [illegible]a Hitzenauer

Kollinearität, Linearkombination und Komplanarität

Kollinearität



> ***Definition***
>
> Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear (linear abhängig), wenn einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist:
> $\vec{b}$ **=** $\mathbf{k} \cdot \vec{a}$ **mit** $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$

Geometrisch bedeutet das, dass die Vektoren (anti-)parallel sind.
Kollinearität steht im Zusammenhang mit dem Begriff der Linearkombination.

Linearkombination – Vektorzug/Vektorkette

Geometrisch bedeutet eine Linearkombination die Aneinanderreihung von Vektoren, die auch als Addition/Subtraktion von Vektoren angesehen werden können und als **Vektorzug/Vektorkette** bezeichnet wird.

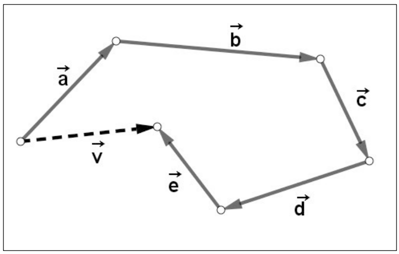


Abb. 1

Ist in einem Vektorzug/einer Vektorkette der Vektor $\vec{v}$ ein Nullvektor $\vec{0}$ ($\vec{v} = \vec{0}$), dann ist die Vektorkette eine **geschlossene Vektorkette** (Anfangs- und Endpunkt der Kette fallen zusammen).

Beispiel: geschlossene Vektorkette mit vier Vektoren:

$$k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \cdot \vec{c} + k_4 \cdot \vec{d} = \vec{v} = \vec{0}$$

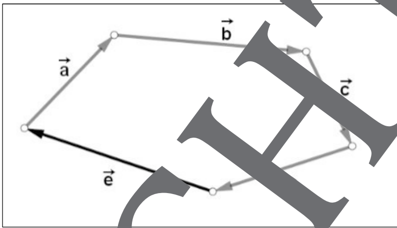


Abb. 2

> ***Definition***
>
> Eine Linearkombination von Vektoren ist ein Vektor, der sich durch Skalarmultiplikation und Vektoraddition von gegebenen Vektoren darstellen lässt:
> $\vec{v} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \cdot \vec{c} + \ldots + k_n \cdot \vec{z}$ mit $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots n$

Die Untersuchung zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf Kollinearität kann auch mithilfe der Linearkombination erfolgen:

> ***Definition***
>
> Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann **kollinear** (linear abhängig), wenn es genau zwei reelle Zahlen k_1 und k_2 gibt, die nicht beide null sind, sodass gilt:
> $\mathbf{k_1} \cdot \vec{a} + \mathbf{k_2} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ mit $\mathbf{k_1} \wedge \mathbf{k_2} \neq \mathbf{0}$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Existiert für die Vektorgleichung nur die triviale Lösung $k_1 = k_2 = 0$, so sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **nicht kollinear**, also **linear unabhängig**.

Komplanarität

> ***Definition***
>
> Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ im dreidimensionalen Raum heißen komplanar (linear abhängig) genau dann, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt:
> $\vec{c} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Geometrisch bedeutet das, dass die drei Vektoren in einer Ebene liegen.

Aufgaben

1. Stellen Sie fest, ob die beiden Vektoren kollinear (linear abhängig) oder nicht kollinear sind.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ -2,0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ -3,5 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

   c) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,6 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

   d) $\vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

   c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: Vermutungen kommunizieren
- Problemlösen: begründen, argumentieren
- Modellierung: --
- Medien: –
- Methode: Einzel-, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Kollinearität, Linearkombination, Vektorzug, Vektorkette, geschlossene Vektorkette, Komplanarität, LGS

Autor: Dr. Jürgen Leitz

Lösung

1. Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig (kollinear), wenn einer der beiden Vektoren als Vielfaches des anderen dargestellt werden kann:
$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{b} = s \cdot \vec{a}$

a) $\begin{pmatrix} 1,6 \\ -2,0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2,8 \\ -3,5 \end{pmatrix}$ Vektorgleichung

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 1,6 = 2,8 \cdot r \\ \text{II} & -2,0 = -3,5 \cdot r \end{array}$$

Aus I folgt: $r = \frac{1,6}{2,8} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

Aus II folgt: $r = \frac{-2,0}{-3,5} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{4}{7} \cdot \vec{b}$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear.

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 4 = -6 \cdot r & \Rightarrow \quad r = -\frac{2}{3} \\ \text{II} & 3 = -4 \cdot r & \Rightarrow \quad r = -\frac{3}{4} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Das LGS ist nicht lösbar.

$\Rightarrow$ $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind nicht kollinear.

c) $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,6 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & -4 = 4,8 \cdot r & \Rightarrow \quad r = -\frac{5}{6} \\ \text{II} & 3 = -3,6 \cdot r & \Rightarrow \quad r = -\frac{5}{6} \\ \text{III} & 2 = -2,4 \cdot r & \Rightarrow \quad r = -\frac{5}{6} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\vec{e} = -\frac{5}{6} \cdot \vec{f}$

$\Rightarrow$ $\vec{e}$ und $\vec{f}$ sind kollinear.

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & -3 = 6 \cdot r & \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{2} \\ \text{II} & 1 = 2 \cdot r & \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2} \\ \text{III} & 2 = -4 \cdot r & \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Das LGS ist nicht lösbar.

$\Rightarrow$ $\vec{g}$ und $\vec{h}$ sind nicht kollinear.

5.

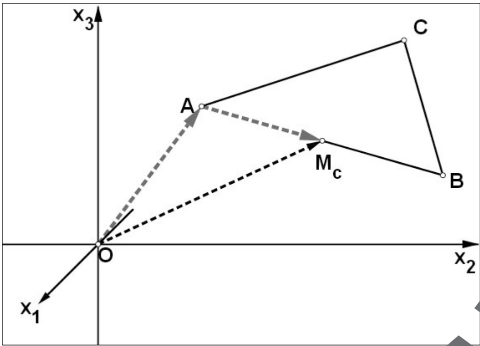


Abb. 3

Da M_c Mittelpunkt der Seite c ist, gilt vektoriell:

Mit $\overrightarrow{OA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM_c}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_c\,(1 \mid 2 \mid -1{,}5)$

Analog gilt dann:

Mit $\overrightarrow{OC} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OM_a}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_a\,(3 \mid 2 \mid -2{,}5)$

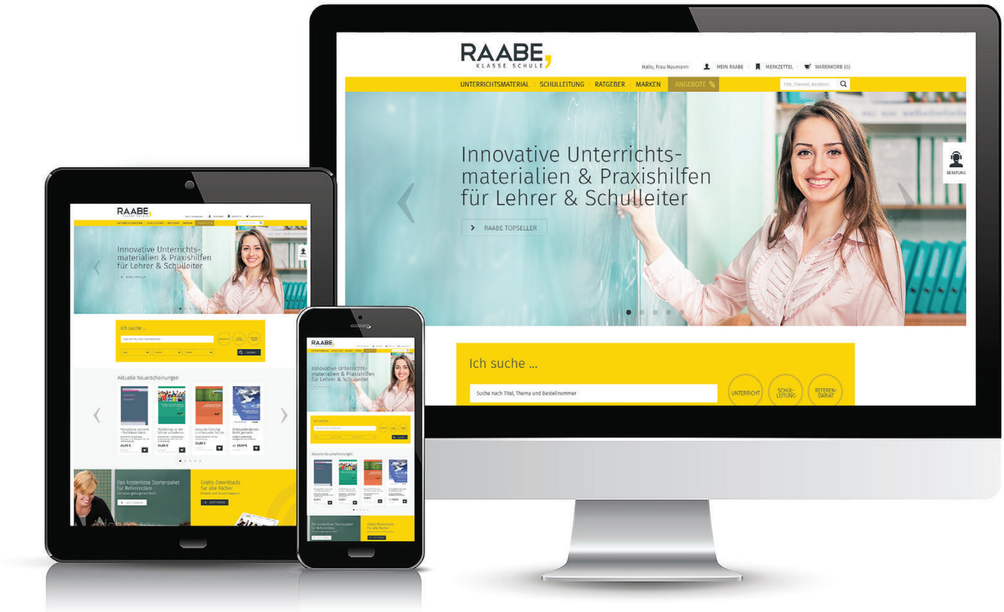
Mit $\overrightarrow{OA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OM_b}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_b\,(1 \mid 2 \mid -3)$

RAABE,
KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de