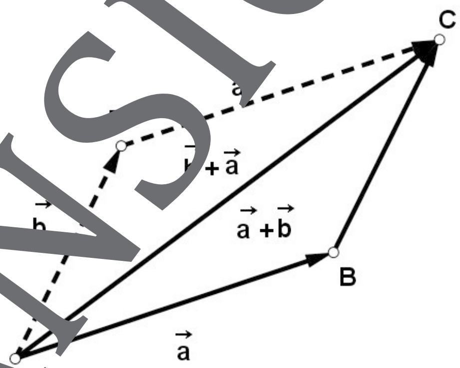
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Rechnen mit Vektoren

Definitionen und Aufgaben

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible]
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Bildnachweis Titel: Dr. Jürgen Leitz
Lektorat: Mona Hitzenauer

Rechnen mit Vektoren

Addition von Vektoren – Summe von Vektoren

a) **Geometrisch**

(1) **Dreiecksregel**

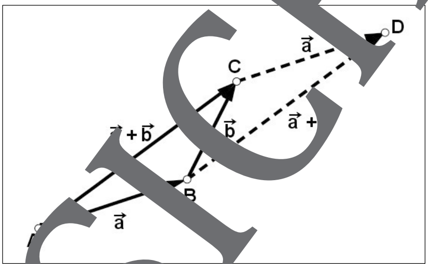


Abb. 1

(2) **Parallelogrammregel**

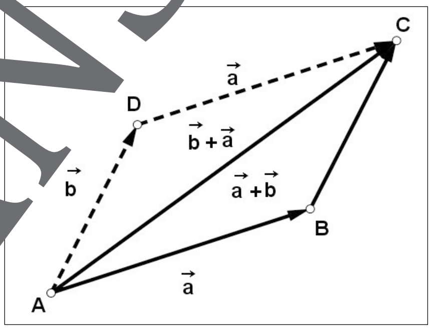


Abb. 2

Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ ist gleich dem Diagonalenvektor in dem durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm.
Die Pfeile werden aneinandergesetzt (Anfang des zweiten Summanden an das Ende des Ersten). Dies entspricht einer nacheinander Ausführung zweier Verschiebungen mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Der Ergebnisvektor (Summenvektor) für die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ geht vom Anfang des ersten Summanden zum Ende des Zweiten.
Gleichzeitig ist zu erkennen, dass das Kommutativgesetz gilt.

b) **Algebraisch**

Definition

Vektoren werden addiert, indem man die entsprechenden Koordinaten addiert:

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

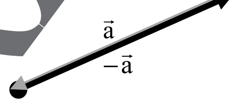
Dies gilt auch für mehr als zwei Vektoren.

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nullvektor

Die Summe aus einem Vektor und seinem Gegenvektor ergibt den Nullvektor.



Subtraktion von Vektoren – Differenz von Vektoren

a) **Geometrisch**:
Geometrisch kann man die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ähnlich wie deren Summe als Diagonalenvektor in dem von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm darstellen.
Im Dreieck BCD gilt:

$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

Für die geometrische Subtraktion zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Dreieck ABC) ergibt sich:

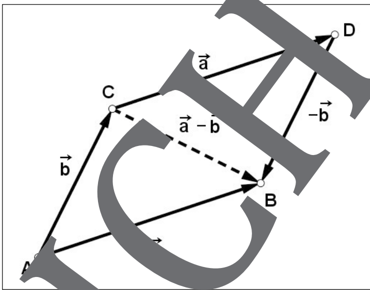


Abb. 3

Die Pfeile werden aneinandergesetzt (Anfang des ersten und des zweiten Vektors fallen zusammen. Der Ergebnisvektor (Differenzvektor) für die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ geht vom Endpunkt des Subtrahenden (Vektor $\vec{b}$)zum Endpunkt des Minuenden (Vektor $\vec{a}$).

b) **Algebraisch**

Definition

Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem man die entsprechenden Koordinaten subtrahiert:

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

1. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Vektorterme:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{c} + \vec{d}$

c) $\vec{d} - \vec{e}$ d) $\vec{0}$ [illegible]

e) $\vec{a} + \vec{d}$ f) [illegible] $- \vec{d} +$ [illegible]

g) $\vec{f} - \vec{f}$ h) $\vec{b} - \vec{a}$

i) $\vec{c} + \vec{d} - \vec{e} + \vec{f}$ j) [illegible] $- \vec{0}$

2. Füllen Sie bei den folgenden Vektoren die Lücken aus, sodass die Gleichung eine wahre Aussage ist.

a) $\begin{pmatrix} \square \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ \square \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ [illegible] \\ \square \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ \square \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \square \\ 3 \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ \square \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \square \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ 5 \\ [illegible] \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \square \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \square \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ [illegible] \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [illegible] \\ \square \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \square \end{pmatrix}$

3. A, B und C seien beliebige Eckpunkte eines Dreiecks ABC.
   Vereinfachen Sie folgende Vektorterme.

   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB})$

   c) $\overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{BC})$ d) $\overrightarrow{BC} + (-\overrightarrow{AC})$

   e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB}$

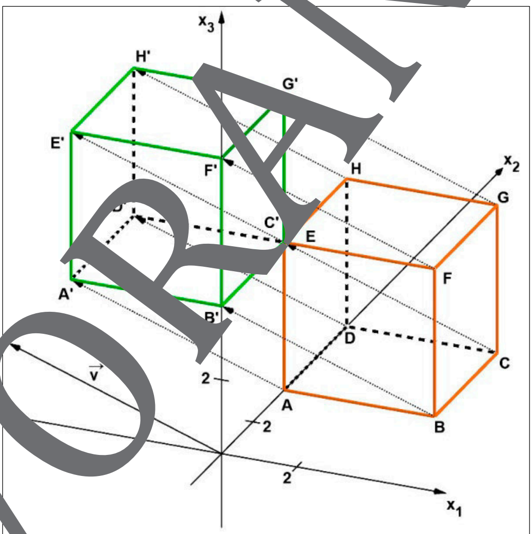
   Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an und markieren Sie die entsprechenden Vektoren.

4. Gegeben sind die Punkte A (–2 | 2 | –2), B (4 | [illegible] | –2), C (–2 | [illegible] | 7) und D (2 | –3 | 3).

   a) Geben Sie alle möglichen Verbindungsvektoren zwischen diesen Punkten an, wobei die Orientierung bezüglich der [illegible] alphabetisch sei, also $\overrightarrow{AB}$, nicht aber $\overrightarrow{BA}$.

   b) Zeigen Sie algebraisch und geometrisch: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

   c)



A[illegible] 5

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: begründen, argumentieren
- Problemlösen: Darstellung verwenden
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Addition/Subtraktion (geometrisch und algebraisch) von Vektoren, Dreiecksregel, Parallelogrammregel, Nullvektor, Vektor zwischen zwei Punkten, Verbindungsvektor, Differenzvektor, Vervielfachen von Vektoren, Skalarmultiplikation (S-Multiplikation)

Autor: Dr. Jürgen Leitz

Lösung

1. a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) $\vec{d} - \vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\vec{0} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Nicht möglich, da Vektor $\vec{a}$ in der Ebene und Vektor $\vec{d}$ im Raum liegt.

f) $\vec{c} - \vec{d} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\vec{f} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

i) $\vec{c} + \vec{d} - \vec{e} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

j) $\vec{f} - \vec{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{[illegible]} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

   b) $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC}$

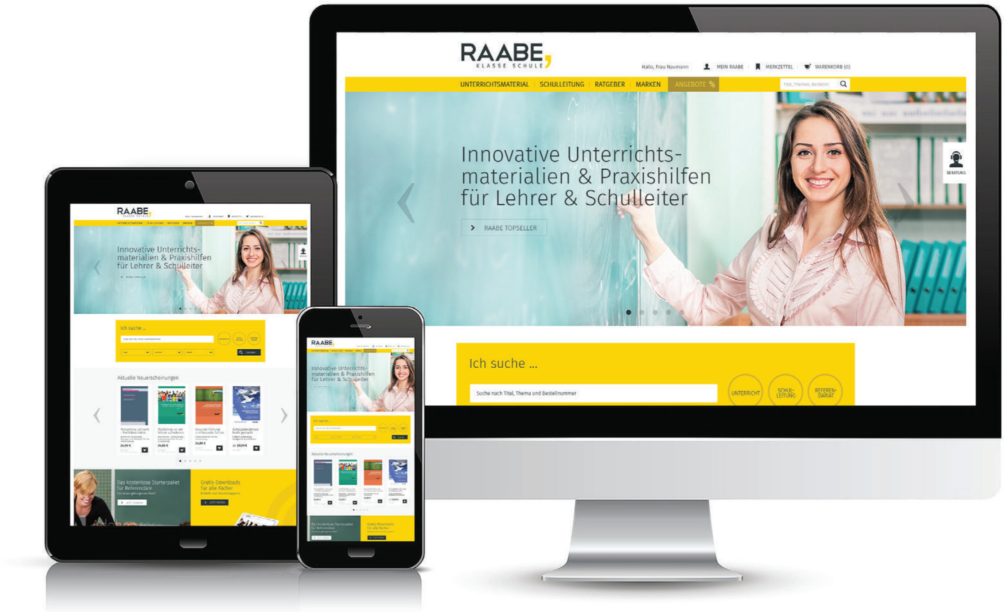
   c) $\overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}$

   d) $\overrightarrow{BC} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}$

   e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AC}$

RAABE,
KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de