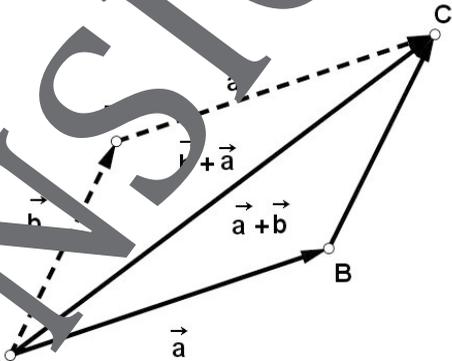


# UNTERRICHTS MATERIALIEN

## Analytische Geometrie Sek. II



**Rechnen mit Vektoren**

Definitionen und Aufgaben

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 59 Abs. 1 Nr. 1 UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder öffentlich zugänglich gemacht oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der raabe Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-60  
meinRAABe@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Susanne Oth

Satz: Roter MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe

Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz

Bildnachweise: Titel: Dr. Jürgen Leitz

Lektorat: Mona Hitzenuer

## Rechnen mit Vektoren

### Addition von Vektoren – Summe von Vektoren

#### a) Geometrisch

##### (1) Dreiecksregel

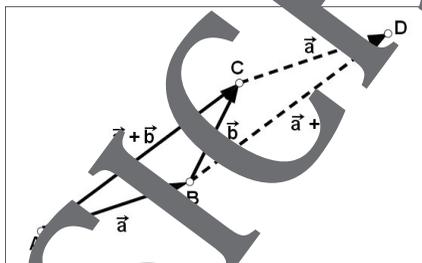


Abb. 1

##### (2) Parallelogrammregel

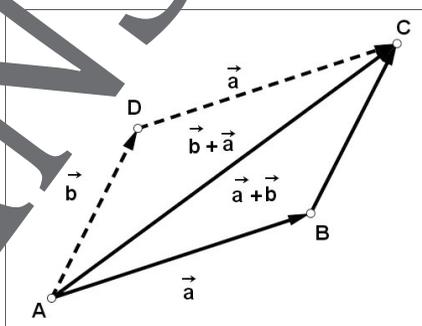


Abb. 2

Der Summenvektor  $\vec{a} + \vec{b}$  ist gleich dem Diagonalenvektor in dem durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramm.

Die Pfeile werden aneinandergesetzt (Anfang des zweiten Summanden an das Ende des Ersten). Dies entspricht einer nacheinander Ausführung zweier Verschiebungen mit den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Der Ergebnisvektor (Summenvektor) für die Summe  $\vec{a} + \vec{b}$  geht vom Anfang des ersten Summanden zum Ende des Zweiten.

Gleichzeitig ist zu erkennen, dass das Kommutativgesetz gilt.

## b) Algebraisch

**Definition**

Vektoren werden addiert, indem man die entsprechenden Koordinaten addiert:

Mit  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  ist

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

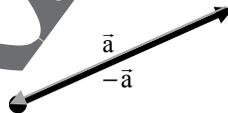
Dies gilt auch für mehr als zwei Vektoren.

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 + 2 \\ 2 + 1 \\ 3 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Nullvektor**

Die Summe aus einem Vektor und seinem Gegenvektor ergibt den Nullvektor.



## Subtraktion von Vektoren – Differenz von Vektoren

### a) Geometrisch:

Geometrisch kann man die Differenz zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ähnlich wie deren Summe als Diagonalenvektor in dem von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramm darstellen.

Im Dreieck BCD gilt:

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

Für die geometrische Subtraktion zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  (Dreieck ABC) ergibt sich:

Die Pfeile werden aneinandergesetzt (Anfang des ersten und des zweiten Vektors fallen zusammen). Der Ergebnisvektor (Differenzvektor) für die Differenz  $\vec{a} - \vec{b}$  geht vom Endpunkt des Subtrahenden (Vektor  $\vec{b}$ ) zum Endpunkt des Minuenden (Vektor  $\vec{a}$ ).

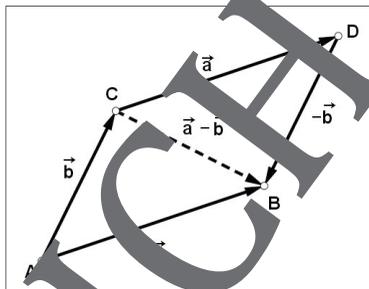


Abb. 3

### b) Algebraisch

#### Definition

Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem man die entsprechenden Koordinaten subtrahiert:

Mit  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  ist:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

#### Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## Aufgaben

1. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Vektoren:

a)  $\vec{a} + \vec{b}$

b)  $\vec{c} + \vec{d}$

c)  $\vec{d} - \vec{e}$

d)  $\vec{0} - \vec{f}$

e)  $\vec{a} + \vec{d}$

f)  $\vec{c} - \vec{d} + \vec{e}$

g)  $\vec{f} - \vec{f}$

h)  $\vec{b} - \vec{a}$

i)  $\vec{c} + \vec{d} - \vec{e} + \vec{f}$

j)  $\vec{1} - \vec{0}$

2. Füllen Sie bei den folgenden Vektoren die Lücken aus, sodass die Gleichung eine wahre Aussage ist.

a)  $\begin{pmatrix} \square \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ \square \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \square \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} -2 \\ \square \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \square \\ 3 \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ \square \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \square \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ 5 \\ \square \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} -3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \square \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} \square \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \square \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \square \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \square \end{pmatrix}$

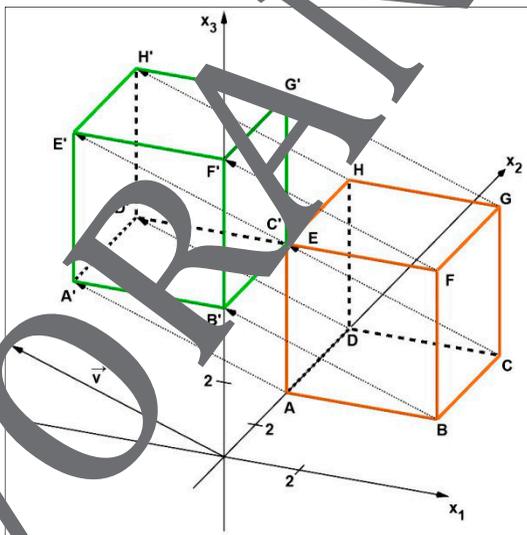
3. A, B und C seien beliebige Eckpunkte eines Dreiecks ABC. Vereinfachen Sie folgende Vektortermine.

- a)  $\overline{AB} + \overline{BC}$                       b)  $\overline{AB} + (-\overline{CB})$   
 c)  $\overline{AC} + (-\overline{BC})$                     d)  $\overline{BC} + (-\overline{AC})$   
 e)  $\overline{AC} + \overline{BB}$

*Hinweis:* Fertigen Sie eine Skizze an und markieren Sie die entsprechenden Vektoren.

4. Gegeben sind die Punkte A  $(-2 \mid 2 \mid -2)$ , B  $(4 \mid -1 \mid -2)$ , C  $(-1 \mid 1 \mid 1)$  und D  $(2 \mid -3 \mid 3)$ .

- a) Geben Sie alle möglichen Verbindungsvektoren zwischen diesen Punkten an, wobei die Orientierung bezüglich der Punkte alphabetisch sei, also  $\overline{AB}$ , nicht aber  $\overline{BA}$ .  
 b) Zeigen Sie algebraisch und geometrisch:  $\overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC}$   
 c)



**Kompetenzprofil**

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: begründen, argumentieren
- Problemlösen: Darstellung verwenden
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Addition/Subtraktion (geometrisch und algebraisch) von Vektoren, Dreiecksregel, Parallelogrammregel, Nullvektor, Vektor zwischen zwei Punkten, Verbindungsvektor, Differenzvektor, Vervielfachen von Vektoren, Skalarmultiplikation (S-Multiplikation)

**Autor:** Dr. Jürgen Leitz

**Lösung**

$$1. \quad \text{a) } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{d} - \vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \vec{0} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{a} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nicht möglich, da Vektor  $\vec{a}$  in der Ebene und Vektor  $\vec{d}$  im Raum liegt.

$$\text{f) } \vec{c} - \vec{d} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g) \vec{f} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h) \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$i) \vec{c} + \vec{d} - \vec{e} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$j) \vec{f} - \vec{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2. a) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$3. a) \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$b) \vec{AB} + (-\vec{CB}) = \vec{AC}$$

$$c) \vec{AC} + (-\vec{BC}) = \vec{AB}$$

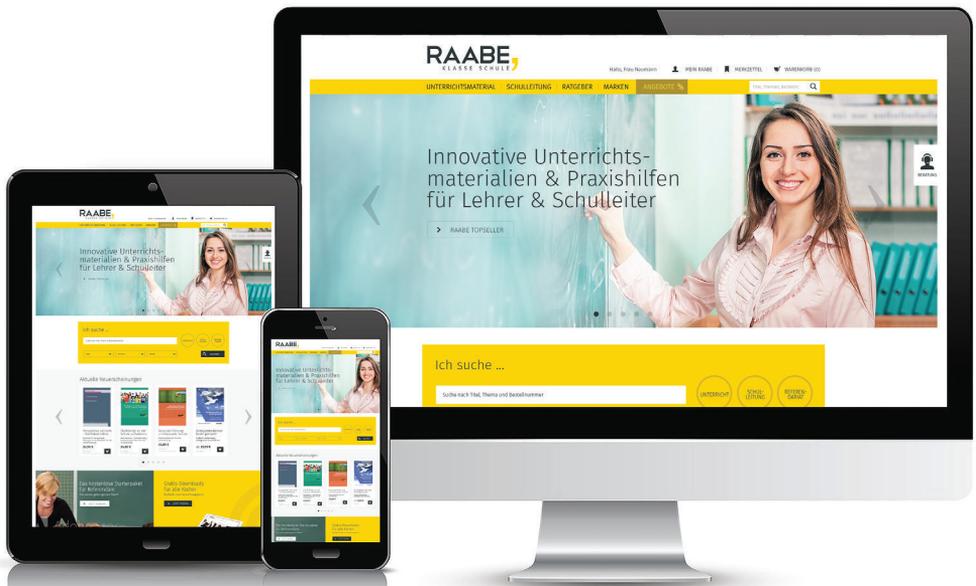
$$d) \vec{BC} + (-\vec{AC}) = \vec{BA}$$

$$e) \vec{AC} + \vec{BB} = \vec{AC}$$

## **Dieses Werk ist Bestandteil der Reihe RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß §60b UrhWissG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung herunterzuladen, zu speichern und in Klassensatzstärke auszudrucken. Jede darüber hinausgehende Nutzung sowie die Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig. Darüber hinaus sind Sie nicht berechtigt, Copyrightvermerke, Markenzeichen und/oder Eigentumsangaben des Werks zu verändern.

## Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



### Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über  
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch  
SSL-Verschlüsselung

**Mehr unter: [www.raabe.de](http://www.raabe.de)**