Berechnungen am Weihnachtsstern – Aufgaben zur senkrechten Projektion

von Günther Weber

© Colourbox

Während der Adventszeit hängen in vielen Fenstern 5-zackige Weihnachtssterne. In diesem Beitrag modellieren Ihre Schüler solche Sterne mathematisch. Dabei beschäftigen sie sich mit der senkrechten Projektion. Sie berechnen Geraden in der Ebene und im Raum, Winkel zwischen Vektoren und Ebenen sowie den Schnitt von Gerade und Ebene bzw. Kugel. Die Konstruktion des Modells mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware bietet in diesem Zusammenhang eine hilfreiche Visualisierungsmöglichkeit.

Berechnungen am Weihnachtsstern – Aufgaben zur senkrechten Projektion

von Günther Weber

Kompetenzprofil

Inhalt:	senkrechte Projektion, Kreisgleichung, Geraden in der Ebene und im Raum, Winkel zwischen Vektoren/Ebenen, Schnitt Gerade – Ebene/Kugel, Einheitsrichtungsvektoren
Medien:	GTR/CAS, dynamische Mathematiksoftware
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren und beweisen (K 1), Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematisch modellieren (K 3)

Berechnungen am Weihnachtsstern – Aufgaben zur senkrechten Projektion

Methodisch-didaktische Hinweise

Aufgabe 1 kann arbeitsteilig bearbeitet werden, indem z. B. die „äußeren“ und „inneren“ Eckpunkte des Sterns getrennt bearbeitet werden.
Die Aufgaben 1 und 3 können zudem differenziert gelöst werden, indem die Methoden der Analytischen oder die Methoden der Analysis zur Lösung benutzt werden.
Insbesondere bei leistungsschwächeren Lerngruppen sollte vor der Bearbeitung geklärt werden, durch welche geometrischen Objekte die Punkte des Sterns festgelegt sind. Veranschaulicht werden kann dies z. B. durch eine Konstruktion mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware, z. B. GeoGebra.

Zur Konstruktion des Grundrisses des Sterns (siehe Abbildung 1) siehe folgenden Konstruktionsweg in GeoGebra:

ra = 5

A1 = (ra, 0)
→ (5, 0)

ri = 2.25

I1 = (−ri, 0)
→ (-2.25, 0)

M = (0, 0)

A2 = Drehe(A1, 72°, M)
→ (1.545, 4.755)

A3 = Drehe(A1, 144°, M)
→ (-4.045, 2.939)

A4 = Drehe(A1, 216°, M)
→ (-4.045, -2.939)

A5 = Drehe(A1, 288°, M)
→ (1.545, -4.755)

I2 = Drehe(I1, 72°, M)
→ (-0.695, -2.14)

I3 = Drehe(I1, 144°, M)
→ (1.82, -1.323)

I4 = Drehe(I1, 216°, M)
→ (1.82, 1.323)

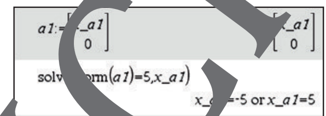
I5 = Drehe(I1, 288°, M)
→ (-0.695, 2.14)

Vieleck1 = Vieleck(A1, I4, A2, I5, A3, I1, A4, I2, A5, I3)

Lösungen

1. **Lösung mithilfe der Methoden der Analytischen Geometrie**

a) Aufgrund der Symmetrie des Grundrisses zur x-Achse liegen die Punkte A_1 und I_2 auf der x-Achse mit der Gleichung y = 0.
Der Punkt A_1 hat somit die Koordinaten $A_1\,(x_{A_1}\,|\,0)$. Da im Koordinatensystem $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$ hat der Punkt A_1 vom Ursprung den Abstand 5 LE.



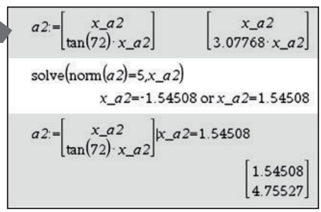
$$\left|\overrightarrow{OA_1}\right| = \sqrt{x_{A_1}^2} = \sqrt{25}$$

$$\Rightarrow x_{A_1} = 5 \vee x_{A_1} = -5$$

Da x_{A_1} auf dem positiven Teil der x-Achse liegt, lauten die Koordinaten $A_1\,(5\,|\,0)$.
Die „äußeren Eckpunkte" bilden ein regulären Fünfeck. Der Punkt A_2 liegt folglich auf der Geraden mit der Gleichung:

$$y = \tan\left(\frac{360°}{5}\right)\cdot x = \tan(72°)\cdot x$$

Die Koordinaten lauten daher:
$A_2\,(x_{A_2}\,|\,\tan(72°)\cdot x_{A_2})$



und es gilt:

$$\left|\overrightarrow{OA_2}\right| = \sqrt{x_{A_2}^2 + (\tan(72°)\cdot x_{A_2})^2} = \sqrt{25}$$

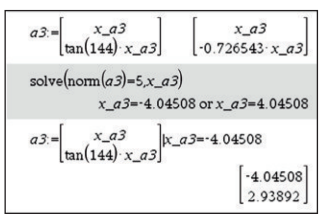
$$\Rightarrow x_{A_2} \approx -1{,}545 \vee x_{A_2} \approx 1{,}545$$

Da x_{A_2} im Grundriss positiv ist, gilt: $x_{A_2} \approx 1{,}545$. Nach Berechnen der y-Koordinate erhält man die gerundeten Koordinaten: $A_2\,(1{,}545\,|\,4{,}755)$.
Der Punkt A_3 liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = \tan(144°)\cdot x$ die Koordinaten lauten daher:

$$\left|\overrightarrow{OA_3}\right| = \sqrt{x_{A_3}^2 + (\tan(144°)\cdot x_{A_3})^2} = 25$$

$$\Rightarrow x_{A_3} \approx -4{,}045 \vee x_{A_3} \approx 4{,}045$$

$A_3\,(x_{A_3}\,|\,\tan(144°)\cdot x_{A_3})$ und es gilt:



Da x_{A_3} im Grundriss negativ ist, gilt $x_{A_3} \approx -4{,}045$. Nach Berechnen der y-Koordinate erhält man die gerundeten Koordinaten: $A_3\,(-4{,}045\,|\,2{,}939)$.

2.

a) Verbindet man im Grundriss den Mittelpunkt M mit den „inneren" Eckpunkten des Sterns, so entstehen 5 kongruente Drachenvierecke. Die Diagonale $\overline{MA_1}$ des Drachens hat eine Länge von 5 cm (Radius des äußeren Kreises), die Diagonale $\overline{I_3I_4}$ des Drachens eine Länge von 2,64 cm (verdoppelte y-Koordinate des Punktes I_4).
Der Flächeninhalt eines Drachen mit den Diagonalen e und f berechnet sich nach der Formel:

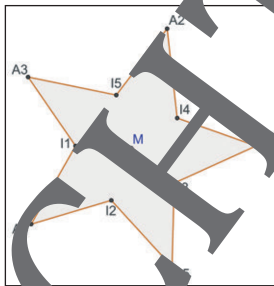


Abb.

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

Die Grundfläche des Sterns A_S hat somit eine Größe von:

$$A_s = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}64 \right) = 33 \ [\text{cm}^2].$$

Unterteilt man die Pyramide durch einen Schnitt durch die „äußeren" und „inneren" Eckpunkte, so entstehen 2 kongruente Pyramiden. Das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h berechnet sich nach der Formel:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche des Sterns ist gleich A_S, die Höhe der Pyramide gleich der halben Dicke des Poresta-Sterns.

$as := 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1.32252$	33.063
$vs := 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot as \cdot 1.5$	33.063

$$V_S = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 45{,}5 \cdot 1{,}5 \right) = 45{,}5 \ [\text{cm}^3]$$

Das Volumen des Poresta-Sterns beträgt ca. 45,5 cm³.
Anmerkung: Die Ergebnisse in den Screenshots unterscheiden sich von den Ergebnissen der Rechnung per Hand, da dort mit berechneten Werten weiter gerechnet wird.

b) Der Stern besteht aus 5 Zacken und jeder Zacken aus 4 kongruenten Dreiecken. Insgesamt besteht die Oberfläche des Sterns somit aus 20 kongruenten Dreiecken.

Alternative Berechnung mithilfe der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck:

Anmerkung: In der Abbildung ist der Punkt S_1 zur besseren Veranschaulichung überhöht dargestellt.

Das Dreieck $A_2S_1A_5$ ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{A_2A_5}$. Die Länge der Basis ist gleich dem Doppelten der y-Koordinate des Punktes A_2. Die Schenkellänge $\overline{S_1A_2}$ kann berechnet werden mithilfe des Satzes des Pythagoras.

$$\left|\overline{S_1A_2}\right| = \sqrt{5^2 + 1{,}5^2}$$

$$= \sqrt{27{,}25}\ \text{[LE]}$$

Durch die Höhe zur Basis wird das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt; gleichzeitig halbiert die Höhe den Winkel des Dreiecks bei S_1. Mit bekannter Länge der Gegenkathete und der Hypotenuse kann somit die Hälfte des Winkels mithilfe des Sinus berechnet werden. Der Winkel $A_1S_1A_4$ hat eine ungefähre Größe von 131,27°.

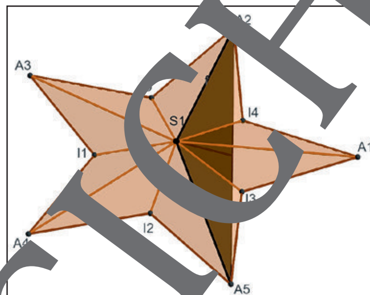


Abb. 1

$a2:=\begin{bmatrix}1.54508\\4.75527\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.54508\\4.75527\\0\end{bmatrix}$
$\frac{4.75527}{\sqrt{27.25}}$	0.910945
$\sin^{-1}(0.91094451986471)$	65.6362
$2\cdot 65.636205231352$	131.272