Platonische Körper im Alltag – Teil 2: Aussichtsturm in Bottrop

von Dr. Jürgen Leitz

Platonische Körper finden wir im Alltag als Bauwerke, als Schmuckgegenstände oder als Bausteine in der Chemie wieder. Die Regelmäßigkeit und die Gesetzmäßigkeit des Aufbaus der Platonischen Körper machen sie in vielerlei Hinsicht interessant. In diesem Beitrag modellieren Ihre Schüler den Aussichtsturm in Bottrop und lösen anschließend abgestimmte Aufgaben.

Platonische Körper im Alltag – Teil 2: Aussichtsturm in Bottrop

von Dr. Jürgen Leitz

Übersicht	1
Informationen und Modellierung	3
Aufgaben	5
Lösungen	10

Kompetenzprofil

Inhalt: Länge, Abstand Punkt/Punkt, Abstand Ebene/Ebene, Mittelpunkt, Schwerpunkt, Schnittwinkel, Schnitt Gerade/Gerade, Schnitt Gerade/Ebene, lineares Gleichungssystem (LGS), gleichseitiges Dreieck, Tetraeder, Oktaeder, platonische Körper, Oberfläche, Volumen, Dr[illegible], Ortsvektor, Normalenvektor, Einheitsvektor, Vektorprodukt, Spatprodukt, Parameterform, Koordinatenform, Lotfußpunkt, Flächenwinkel, Flächen-Kanten-Winkel

Medien: dynamische Mathematiksoftware

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematisch modellieren (K 3), mathematische Darstellungen verwenden (K 4)

Platonische Körper im Alltag – Teil 2: Aussichtsturm in Bottrop

Informationen und Modellierung

Die Regelmäßigkeit und die Gesetzmäßigkeit des Aufbaus der Platonischen Körper machen diese auf vielerlei Art für den Menschen interessant. So finden wir sie im Alltag u. a. als Bauwerke (s. Abb. 1), als Schmuckgegenstände, als Kunstwerke und als Bausteine in der Chemie wieder. Grundlegendes Wissen zu Platonischen Körpern wurde bereits in einem Beitrag dargestellt (siehe T.2.10). Eine zusammenfassende Artikelsammlung finden Sie im Archiv.
In diesem Teil 2 zu „Platonische Körper im Alltag" geht es, wie schon in Teil 1 (siehe T.2.11), um die Anwendung Platonischer Körper.

Der Aussichtsturm in Bottrop

Abb. 1
© Frank Vincentz/Wikimedia Commons – CC BY-SA 3.0

Im Ruhrgebiet auf der Halde Beckstraße in Bottrop-Batenbrock wurde ein Aussichtsturm mit drei Aussichtsplattformen in Gestalt eines Tetraeders mit einer Kantenlänge von ca. 60 m errichtet (Abb. 1). Die Stahlkonstruktion besteht aus den Seiten eines großen Tetraeders mit einbeschriebenen kleineren Tetraedern und einbeschriebenen Oktaedern. Das Gerüst ist etwa [illegible] m hoch und ruht auf vier Stahlbetonsäulen auf der 120 m über NN liegenden Haldenkuppe. Die Turmspitze liegt bei etwa 177 m über NN. Es gibt drei Aussichtsplattformen, die über Treppen erreicht werden. Die erste Plattform befindet sich in ca. 18 m Höhe über der Halde und wird über eine Hängebrücke erreicht. Die zweite liegt 14 m höher als die erste und wird über eine steile Treppe erreicht. Schließlich führt eine Wendeltreppe zur 6 m höher gelegenen dritten Aussichtsplattform, die aus einem Ring mit 8 m Durchmesser besteht und um 8° geneigt ist. Treppen und Aussichtsplattformen sind in das Gerüst beweglich eingehängt. Die Treppen und Aussichtsplattformen bestehen aus Lichtgittern und Lochplatten und bieten somit einen freien Blick nach unten.

Mathematische Modellierung des Turmgerüstes

Das Turmgerüst als großes Tetraeder hat eine Kantenlänge von 60 m.
Verbindet man die Mitten der sechs Kanten, dann entstehen an den vier Eckpunkten vier Tetraeder mit der halben Kantenlänge. Im Innern ist als Restkörper ein Oktaeder vorhanden. Dieser strukturelle Aufbau wiederholt sich bei drei weiteren Tetraedern, wobei das Tetraeder vorne bei Punkt A leer bleibt:

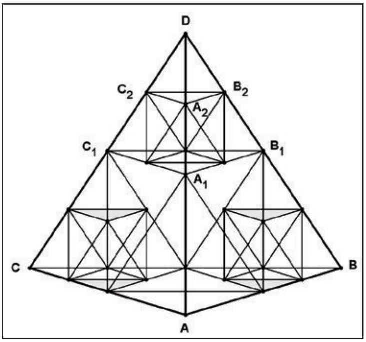


Abb. 2

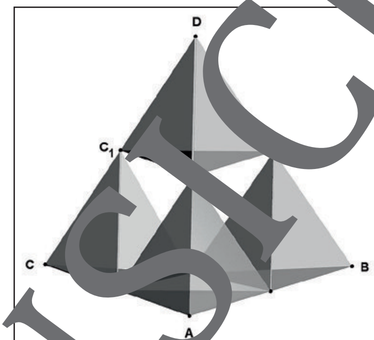


Abb. 3

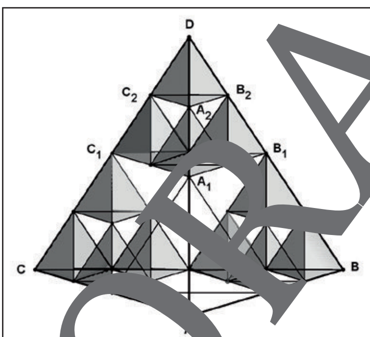


Abb. 4

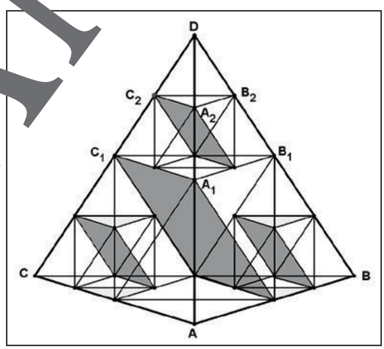


Abb. 5

Aufgaben

1.
   a) Ermitteln Sie die Höhe der Betonsäulen, auf denen das Turmgerüst ru…
   b) In welchen Höhen über der Halde befinden sich die drei Aussic…tsplattfor… ?
   c) Bestimmen Sie die Anzahl der Tetraeder und Oktaeder im Tu… …üst.

2. Die für den Bau des Turmgerüstes verwendeten Stahlrohre …aben einen Du… …messer von 0,40 m und eine Wanddicke von 18 mm.
   a) Wie viele Meter Rohr wurden in dem Gerüst verbaut?
   b) Berechnen Sie die Masse der verbauten Stahlrohre (Dichte … Stahl: $\rho = 7{,}8\,\frac{g}{cm^3}$).

Abb. 6 zeigt die mathematische Modellierung der Lage des Turmgerüstes mit den drei Aussichtsplattformen im Koordinatensystem.

Die Ecke A des Kantengerüstes mit d… leeren Tetraeder liegt im Koordinaten… …sprung. Die beiden anderen Eckpunkte B und C der Grundfläche liege… ebenfalls in der x_1-x_2-Ebene und symm…trisc… …r x_1-Achse.

Die Turmspitze D li… … Richtung der positiven x_3-Achse…

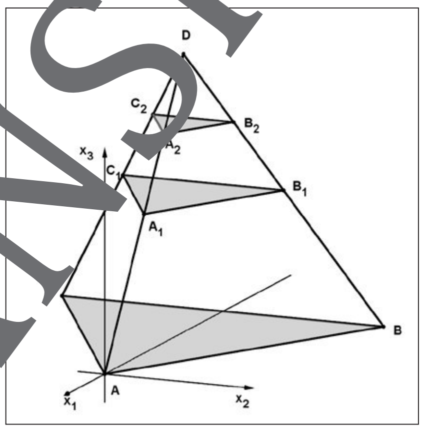


Abb. 6

3.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 und C_2 des Kantengerüstes.

Hinweis: Der Punkt D liegt senkrecht über dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

b) Weisen Sie durch Berechnen der Seitenlängen der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ nach, dass die Dreiecke gleichseitig sind.

c) In welchem ganzzahligen Verhältnis stehen die Seitenlängen der Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zueinander?

d) Leiten Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser drei Dreiecke aus dem Seitenverhältnis von Teilaufgabe c) ab.

e) Bestätigen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte in Teilaufgabe d) durch Berechnen der Flächeninhalte dieser drei Dreiecke mithilfe der Vektorrechnung.

f) Kontrollieren Sie die Ergebnisse von Teilaufgabe e) elementargeometrisch mithilfe der Formelsammlung.

g) Zeichnen Sie in das räumliche Koordinatensystem (Abb. 9) ein Schrägbild des Kantengerüstes mit den drei Aussichtsplattformen.

Zusatzaufgabe

Stellen Sie das Schrägbild mithilfe des Programms GeoGebra dar.

4. Die beiden Aussichtsplattformen $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ liegen in den Ebenen E_1 und E_2 im Innern des Tetraeders.

a) Begründen Sie, wie die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ liegen, und geben Sie ihren Abstand an.

Hinweis: Verwenden Sie die Punktkoordinaten dieser beiden Dreiecke.

b) Weisen Sie rechnerisch unter Verwendung der Vektorrechnung nach, dass die beiden Ebenen E_1 und E_2 zueinander parallel sind.

c) Berechnen Sie den Abstand der beiden Ebenen E_1 und E_2.

Lösungen

1.

a) Der Fußpunkt der Säulen liegt bei etwa 120 m über NN und die Spitze des Turmgerüstes ca. 177 m über NN, also etwa 57 m über der Haldenkuppe. Das Gerüst ist etwa 49 m hoch $\Rightarrow$ Die Säulenhöhe beträgt etwa 8 m.

b) Plattform 1: 18 m
Plattform 2: 18 m + 14 m = 32 m
Plattform 3: 32 m + 6 m = 38 m

c) Das Turmgerüst besteht aus:
- 1 großem, 4 mittleren und 12 kleinen Tetraedern
- 1 großem und 3 kleinen Oktaedern

Insgesamt sind es also 17 Tetraeder und 4 Oktaeder.

2.

a) Das Kantengerüst setzt sich aus den folgenden Körpern zusammen:
- 1 großes Tetraeder, Kantenlänge a = 60 m $\Rightarrow 6 \cdot 60\text{ m} = 360\text{ m}$
- 1 großes Oktaeder, Kantenlänge a = 30 m $\Rightarrow 12 \cdot 30\text{ m} = 360\text{ m}$
- 3 kleine Oktaeder, Kantenlänge a = 15 m $\Rightarrow 3 \cdot 12 \cdot 15\text{ m} = 540\text{ m}$

Im Gerüst wurden insgesamt 1260 m Rohr verbaut.

b) Allgemein gilt: Dichte $\rho = \frac{\text{Masse m}}{\text{Volumen V}} \Rightarrow m = \rho \cdot V$

Bei Aneinanderreihen der 54 Rohrstücke würde ein 1260 m langer Hohlzylinder entstehen. Die Grundfläche dieses Hohlzylinders ist ein Kreisring mit dem Außendurchmesser $d_a = 0{,}40\text{ m}$. Mit der Wanddicke von 18 mm gilt für den Innendurchmesser d_i:

$d_i = 400\text{ mm} - 2 \cdot 18\text{ mm} = 364\text{ mm} = 0{,}364\text{ m}$

Für das Volumen eines Hohlzylinders gilt:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \left(d_a^2 - d_i^2\right) \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{\pi}{4} \cdot \left(0{,}40^2 - 0{,}364^2\right) \cdot 1\,260\text{ m}^3 \approx 27{,}218\text{ m}^3$$

Die Dichte von Stahl ist $\rho = 7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 7\,800\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 7{,}8\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$

Mit $m = \rho \cdot V$ erhält man für die Masse m:

$$m = 7{,}8\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \cdot 27{,}218\text{ m}^3 \approx 212{,}3\text{ t}$$

Die im Stahlgerüst verbauten Rohre haben eine Masse von etwa 212 t.

3.

a)

(1) Koordinaten der Punkte A, B, C und D Punkt A liegt im Koordinatenursprung

$\Rightarrow A(0|0|0)$

Die Punkte B und C sind bezüglich der x_1-Achse symmetrisch. Da die Kantenlänge des Tetraeders a = 60 ist, gilt wegen der Symmetrie:

$x_{2B} = 30$ und $x_{2C} = -30$

Ferner liegen die Punkte B und C mit dem Punkt A in der x_1-x_2-Ebene.

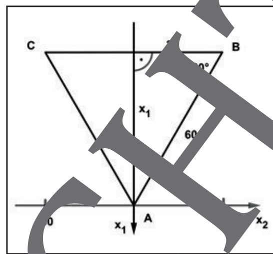


Abb. 10

Damit ist die x_3-Koordinate für beide Punkte $x_{3B} = x_{3C} = 0$ (s. Abb. 10).

Es ist noch die x_1-Koordinate für die Punkte B und C zu bestimmen.

Mithilfe des Satzes von Pythagoras (s. Abb. 10) gilt:

$$x_1^2 = 60^2 - 30^2 = 3600 - 900 = 2700$$

$$x_1 = \sqrt{2700} = \sqrt{900 \cdot 3}$$
$$= 30 \cdot \sqrt{3} \approx 51{,}96$$

Bemerkung:

Bei der Angabe der Koordinaten ist zu beachten, dass die x_1-Koordinaten der Punkte B und C ein negatives Vorzeichen haben.

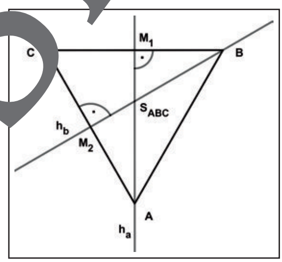
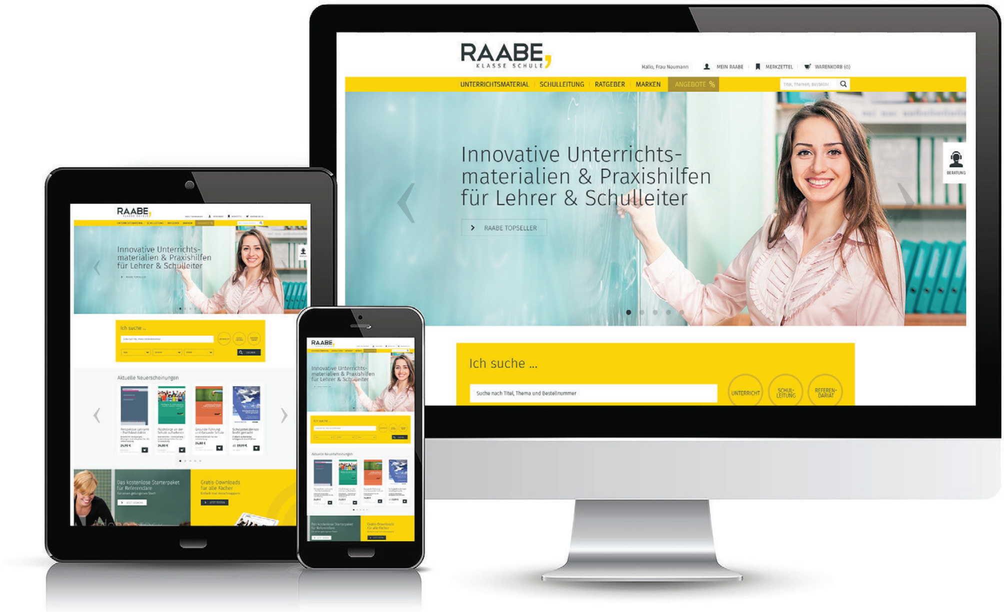


Abb. 11

Somit lauten die Koordinaten der Punkte B und C:

$B(-30 \cdot \sqrt{3}|30|0)$, $C(-30 \cdot \sqrt{3}|-30|0)$

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de