

Ortskurven von Dreieckstransversalen

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau

Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau



© Thomas Barwick/Stockbyte/Get Images Plus

Dynamische Geometriesoftware macht Geometrie lebendig. Eigenschaften von Dreieckstransversalen können schon in der Mittelstufe sehr anschaulich vermittelt werden. Oft bleibt man jedoch in dieser Jahrgangsstufe bei der Betrachtung von Ortskurven stehen. In der Oberstufe eignen sich die Schüler Verfahren der analytischen Geometrie an. Diese bilden die Grundlage, mit der die Lernenden das Thema Dreieckstransversalen tiefer durchdringen können. So stellen sie Gleichungen von Ortskurven markanter Punkte auf und setzen Computeralgebrasysteme ein, um den Rechenaufwand zu minimieren. Die Verknüpfung digitaler Mathematikwerkzeuge mit der analytischen Betrachtung der Ortskurven von Dreieckstransversalen bildet den Schwerpunkt dieses Beitrages.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie, 1. Aufl., II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder ins Internet gestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Kopien an Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. VZMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden die Rechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Raabe Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 6290-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Annette de Witte
Satz: Raabe Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Thomas Barwick/Stone/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing
Lektorat: Maria Hitznauer, Regensburg
Korrektur: Susanna Stotz, Wyhl a. K.

Ortskurven von Dreieckstransversalen

Oberstufe (Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau

Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

| | |
|---|-----------|
| Ortskurven von Dreieckstransversalen | 1 |
| M 1 Wiederholen Sie das Thema „Dreieckstransversalen“ | 2 |
| M 2 Gleichungen eines Kreises | 3 |
| M 3 Ortskurve des Schnittpunktes M der Mittelsenkrechten | 4 |
| M 4 Aufgaben zur Übung | 7 |
| M 5 Variationen der Aufgabenstellung | 8 |
| M 6 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen: | 9 |
| M 7 Folie zu M 4 und M 5 | 10 |
| Hinweise und Lösungen | 11 |

© RAABE 2020

Die Schüler lernen

- Eigenschaften von Dreieckstransversalen wiederholend kennen,
- Gleichungen eines Kreises in kartesischen Koordinaten sowie in vektorieller Form zu verstehen und anzuwenden,
- Geradengleichungen für Dreieckstransversalen aufzustellen,
- Verfahren zur Schnittpunktberechnungen anzuwenden,
- Gleichungen von Ortskurven aufzustellen und zu interpretieren,
- Kreis, Parabel und Gerade als Leitlinie zu benutzen,
- ihre Kenntnisse im Umgang mit dynamischer Geometriesoftware und einem Computeralgebrasystem zu vertiefen (hier mit TI-Nspire CX CAS).

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab = Arbeitsblatt

Fo = Folie

LEK = Lernerfolgskontrolle

Wh = Wiederholungsblatt

| Thema | Material | Methode |
|--|----------|---------|
| Wiederholen Sie das Thema „Dreieckstransversalen“! | M 1 | Ab, Wh |
| Gleichungen eines Kreises | M 2 | Ab |
| Ortskurve des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten | M 3 | Ab |
| Aufgaben zur Übung | M 4 | Ab |
| Variationen der Aufgabenstellung | M 5 | Ab |
| Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen! | M 6 | LEK |
| Folie zu M 4 und M 5 | M 7 | Fo |

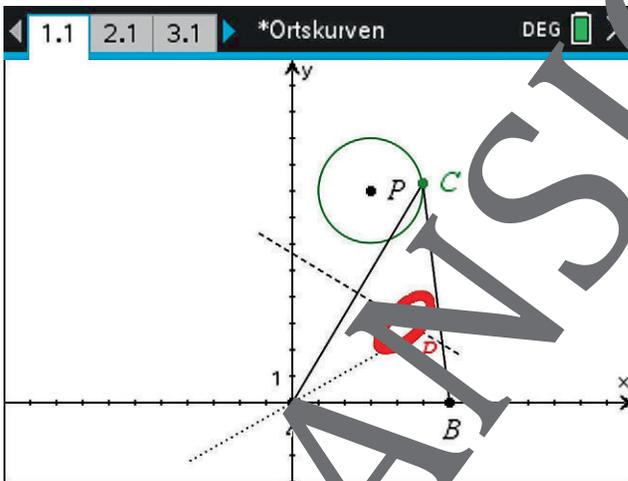
Erklärung zu Differenzierungssymbolen

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| einfaches Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau |
|  | Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben. | |

Ortskurven von Dreieckstransversalen

Gegeben ist ein Dreieck ABC . Der Punkt C liegt auf dem Kreis k .

Wir untersuchen, auf welchen Kurven sich Schnittpunkte von Dreieckstransversalen (Geraden, die Dreiecke schneiden) bewegen, wenn C auf dem Kreis k wandert. Dabei kommen im Wesentlichen Kenntnisse aus der elementaren Geometrie sowie der analytischen und Vektorgeometrie zur Anwendung.



© RAABE 2020

Zur Veranschaulichung ist der Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware (z. B. GeoGebra Classic, <https://www.geogebra.org>) am PC oder auch auf dem Smartphone sinnvoll. Diese können Sie sich nutzen, um rechnerisch ermittelte Ergebnisse einer Selbstkontrolle zu überprüfen. Die erlangten rechnerischen Herleitungen lassen sich mithilfe einer Computeralgebraweitere Software (CAS), z. B. GeoGebra CAS, ohne großen Aufwand umsetzen. Hier wurden die dynamische Geometriesoftware und das Computeralgebrasystem der Software "Texas Instruments CX CAS" genutzt.

 **Tipp:** Auf der Seite <https://wiki.geogebra.org/de/Kategorie:Befehle> finden Sie eine Liste von GeoGebra-Befehlen.

M 1 Wiederholen Sie das Thema „Dreieckstransversalen“!

Konstruktion und Eigenschaften



Aufgabe 1

- Zeichnen Sie das Dreieck ABC mit $A(3|2)$, $B(14|4)$ und $C(5|10)$.
- Konstruieren Sie nur mit Zirkel und Lineal den Umkreis des Dreiecks ABC.
- Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion.



Aufgabe 2

- Zeichnen Sie das Dreieck ABC mit $A(3|2)$, $B(14|4)$ und $C(5|10)$.
- Konstruieren Sie nur mit Zirkel und Lineal den Inkreis des Dreiecks ABC.
- Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion.



Aufgabe 3

Zeichnen Sie mit Ihrer DGS (z. B. GeoGebra) beliebiges Dreiecke ABC. Konstruieren Sie

- den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden (Schwerpunkt),
- den Schnittpunkt H der Höhen
- sowie den Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC.

Verbinden Sie S und H durch eine Gerade g, bündeln Sie alle nicht benötigten Hilfslinien aus, sodass nur noch das Dreieck, die Punkte S, H, M und g auf der Zeichenfläche zu sehen sind. Verändern Sie die Gestalt des Dreiecks ABC im Zugmodus durch Ziehen an einem der Eckpunkte. Beobachten und beschreiben Sie die Lage von M bezüglich der Geraden g.

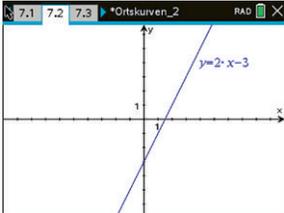


Tipps: Wenn Sie GeoGebra Classic verwenden, dann sollten Sie zunächst die Mittelsenkrechten konstruieren. Mit deren Hilfe lassen sich dann die Seitenhalbierenden einzeichnen. Sie können mit einem Rechtsklick auf ein Objekt (Gerade, Punkt, etc.) dieses ausblenden, wenn sie den Haken vor „Objekt anzeigen“ entfernen.

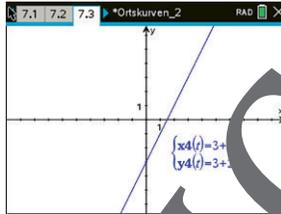
Der Zugmodus ist in GeoGebra das Werkzeug mit dem Mauszeiger ganz links „Be-
wege“.

M 2 Gleichungen eines Kreises

Eine Gerade g lässt sich sowohl durch eine Gleichung als auch durch eine Parameterdarstellung mithilfe von Vektoren analytisch beschreiben, wie dieses Beispiel veranschaulicht:

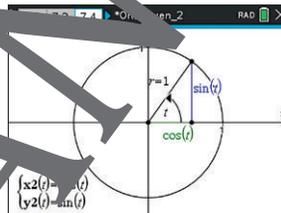
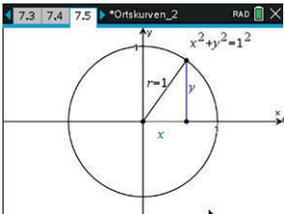


$$y = 2x - 3$$

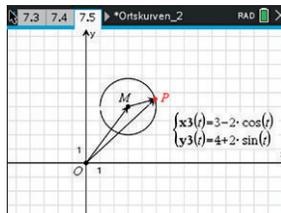
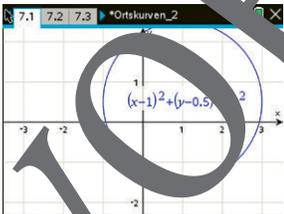


$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

Auf analoge Weise lassen sich auch für einen Kreis sowohl eine Gleichung als auch eine Parameterdarstellung mithilfe von Vektoren angeben. Beispiel: Einheitskreis (Kreis mit Mittelpunkt $M(0|0)$ und Radius $r = 1$):



$x^2 + y^2 = 1^2$ für jeden Winkel $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
Kreis mit Mittelpunkt $M(a|b)$ und Radius r :



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ $\vec{OP}(t) = \vec{OM} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

M 3 Ortskurve des Schnittpunktes M der Mittelsenkrechten

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $A(-4|0)$, $B(4|0)$ und C.

Der Punkt C hat keine festen Koordinaten, sondern liegt auf dem Kreis k mit dem Mittelpunkt $(0|8)$ und dem Radius 2.

Gesucht ist sowohl die Geometriespur des Schnittpunktes M der Mittelsenkrechten dieses Dreiecks als auch eine Gleichung des Ortsvektors von M in Parameterform.

Bemerkung: Die Geometriespur des Punktes M ist die grafische Darstellung der Veränderung von M, wenn der Punkt C auf der Kreislinie k verschoben wird.

Die Geometriespur (GeoGebra: Rechtsklick auf Punkt: „Spur anzeigen“) lässt die Vermutung zu, dass M sich auf einer Strecke bewegt. Diese Strecke liegt auf der y-Achse, weil die Mittelsenkrechte der Dreiecksseite \overline{AB} auf der y-Achse liegt, also für alle Punkte dieser Mittelsenkrechten $x = 0$ gilt.

Eine Gleichung für alle Punkte M (Ortskurve von M) wird mithilfe der analytischen Geometrie ermittelt. Dabei ist es sinnvoll, ein CAS zu verwenden.

Der Kreis k kann durch folgende Parameterdarstellung in vektorieller Form angegeben werden:

$$k(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(t) \\ 8 + 2 \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

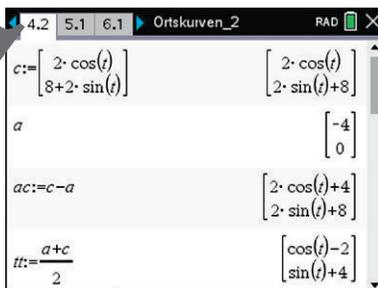
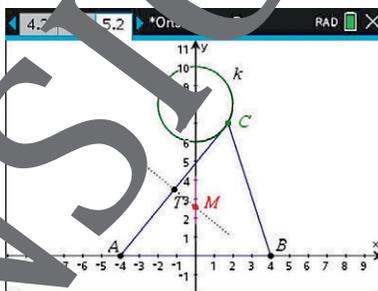
$$t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Der Punkt C hat demzufolge die Koordinaten

$$C(2 \cdot \cos(t) | 8 + 2 \cdot \sin(t)).$$

Wegen $A(-4|0)$ hat der Mittelpunkt T der Strecke \overline{AC} die Koordinaten

$$T(-2 + \cos(t) | 4 + \sin(t)) \quad (\text{siehe Berechnungen rechts}).$$



Der Vektor

$$\overline{AC}(t) = \overline{ac} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) - (-4) \\ 8 + 2 \sin(t) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) + 4 \\ 8 + 2 \sin(t) \end{pmatrix}$$

ist senkrecht zum Richtungsvektor $\overline{v_b}$ der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AC} .

Es muss deshalb das Skalarprodukt der beiden Vektoren \overline{AC} und $\overline{v_b}$ den Wert null haben:

$$\overline{AC} \circ \overline{v_b} = 0.$$

Damit kann z. B. $\overline{v_b}$ so gewählt werden:

$$\overline{v_b}(t) = \overline{vb} = \begin{pmatrix} 8 + 2 \sin(t) \\ -4 - 2 \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Begründung: Das Skalarprodukt zweier Vektoren der Form $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ hat den Wert $x \cdot y + y \cdot (-x) = 0$, d. h., die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind orthogonal zueinander.

Damit lässt sich eine Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AC} angeben durch

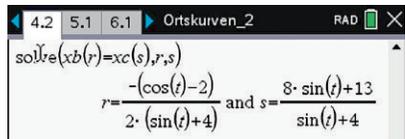
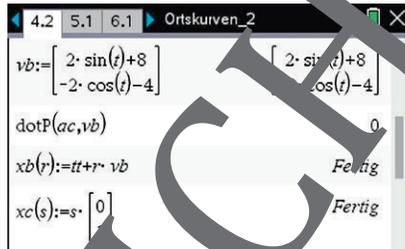
$$\overline{x_b} = \overline{OT}(t) + r \cdot \overline{v_b}(t) = \overline{tt} + r \cdot \overline{vb} = \begin{pmatrix} -2 + \cos(t) \\ 4 + \sin(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 + 2 \sin(t) \\ -4 - 2 \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AB} ist z. B. durch

$$\overline{x_c} = \overline{xc}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, weil sie senkrecht auf der x-Achse steht.

Durch Gleichsetzen von $\overline{x_b}$ und $\overline{x_c}$ lassen sich die Parameter r und s und damit der Ortsvektor des Schnittpunktes M der Mittelsenkrechten bestimmen.



Tipp: Beim „Geogebra CAS“-Rechner geht das mit dem Befehl:
 Löse $2 \cos(t) + r \cdot (8 + 2 \sin(t)) = 0, 4 + \sin(t) + r \cdot (-4 - 2 \cos(t)) = s$, $\{r, s\}$
 Die Darstellung der Lösung kann zur hier gezeigten abweichen.)

© RAABE 2020

Ergebnis:

Die Gleichung der Ortskurve des Schnittpunktes M der Mittelsenkrechten lautet in vektorieller Schreibweise

$$\overline{OM}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8 \sin(t) + 13}{\sin(t) + 4} \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 2\pi$.

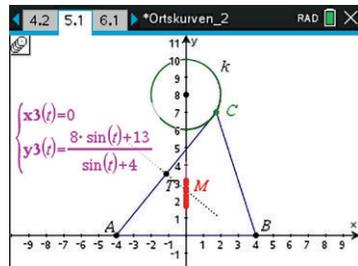
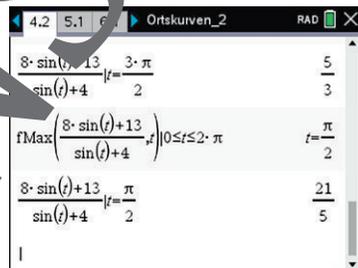
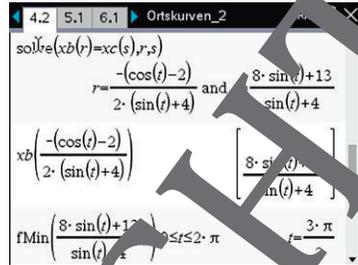
Alle Punkte M liegen auf der y-Achse mit $M(0|y)$. Der kleinste Wert wird für $t = \frac{3\pi}{2} \triangleq 270^\circ$, wenn also der Punkt C ganz „unten“ am Kreis erreicht, der größte für $t = \frac{\pi}{2} \triangleq 90^\circ$, also ganz „oben“ am Kreis.

Mit diesen zwei Winkeln als untere und obere Grenze erhält man dann folgendes Intervall für die y-Werte des Punktes M:

$$\frac{5}{3} \leq y \leq \frac{21}{5} \quad \text{und} \quad y = \frac{8 \sin(t) + 13}{\sin(t) + 4}$$

Zur Selbstkontrolle wird diese Parameterform grafisch dargestellt.

Es ergibt sich das gleiche Bild wie bei der Konstruktion mithilfe der Geometrespur.



M 4 Aufgaben zur Übung



Aufgabe 1

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $A(-4|0)$, $B(4|0)$ und C . Der Punkt C liegt auf dem Kreis k mit dem Mittelpunkt $(0|8)$ und dem Radius 2. Gesucht ist sowohl die Geometriespur des **Schnittpunktes S der Seitenhalbierenden** dieses Dreiecks als auch eine Gleichung des Ortsvektors von S in Parameterform.



Aufgabe 2

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $A(-4|0)$, $B(4|0)$ und C . Der Punkt C liegt auf dem Kreis k mit dem Mittelpunkt $(0|8)$ und dem Radius 2. Gesucht ist sowohl die Geometriespur des **Schnittpunktes H der Höhen** dieses Dreiecks als auch eine Gleichung des Ortsvektors von H in Parameterform.



Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $A(-4|0)$, $B(4|0)$ und C . Der Punkt C liegt auf dem Kreis k mit dem Mittelpunkt $(0|8)$ und dem Radius 2. Gesucht ist sowohl die Geometriespur des **Schnittpunktes W der Winkelhalbierenden** dieses Dreiecks als auch eine Gleichung des Ortsvektors von W in Parameterform.



Hinweis:

Der Richtungsvektor eines Winkelhalbierenden kann als Vektorsumme der normierten Richtungsvektoren der den Winkel einschließenden Dreieckseiten ermittelt werden.

M 5 Variationen der Aufgabenstellung

Weitere Anwendungen lassen sich leicht erstellen. Man kann z. B. die Lage oder die Form der „Leitlinie“, auf der der Dreieckspunkt C_t als Gleiter definiert ist, variieren. Eine weitere Möglichkeit für Variationen der Aufgabenstellung bietet die Verwendung von Schnittpunkten unterschiedlicher Dreieckstransversalen oder die Suche nach Gleichungen für die Ortskurven in kartesischen Koordinaten. Einige Beispiele für solche Variationen sind im Folgenden dargestellt. Die Angabe der Lösungen erfolgt dabei in Kurzform durch die Angabe des Ergebnisses als Gleichung und als Screenshot.



Aufgabe 1: Ortskurven der Schnittpunkte der Mittelsenkrechten mit der Höhe h_b

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(8|0)$ und $C(4|6)$. Der Punkt S liegt auf dem Kreis mit Mittelpunkt $M(7|7)$ und dem Radius $r = 2$. Geben Sie eine Gleichung der Ortskurve des Schnittpunktes

- der Mittelsenkrechten m_c und der Höhe h_a ,
- der Mittelsenkrechten m_b und der Höhe h_a ,
- der Mittelsenkrechten m_a und der Höhe h_a .



Aufgabe 2: Ortskurve mit Parabel als Leitlinie

Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ ($x \in \mathbb{R}$).

Der Parabel ist ein Dreieck ABC mit $A(-4|0)$, $B(4|0)$ und $C(t | f(t))$ einbeschrieben. Untersuchen Sie, auf welcher Kurve der **Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden** des Dreiecks ABC liegt, wenn C auf der Parabel „wandert“. Geben Sie die Gleichung der Ortskurve von S in vektorieller Parameterform und in kartesischen Koordinaten an.



Anschlußaufgabe

Die gegebene Parabel f und die Ortskurve von S schließen jeweils mit der x -Achse eine Fläche ein. Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Flächeninhalte dieser beiden Flächen zueinander stehen.

M 6 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!



Aufgabe 1: Ortskurven mit einer Geraden als Leitlinie

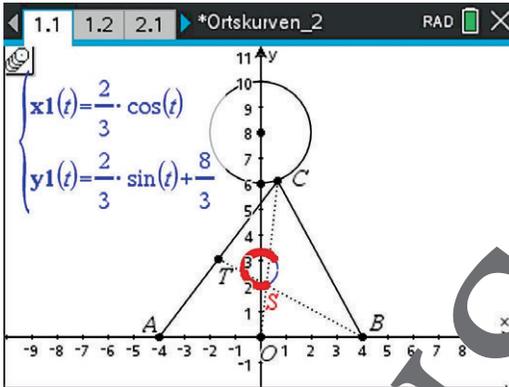
Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(10|0)$ und $C(t|10)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie, welche Gleichungen die Ortskurven der Schnittpunkte der angegebenen Dreieckstransversalen haben, wenn C auf der Geraden $y = 10$ wandert.

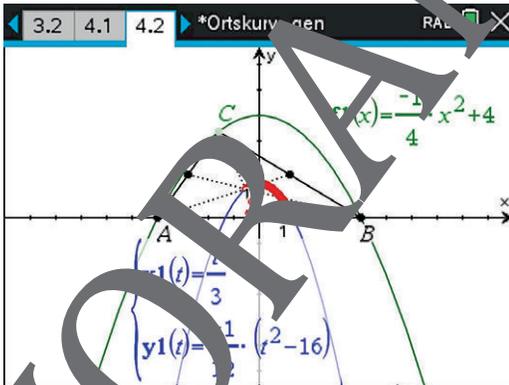
- Schnittpunkt P der Mittelsenkrechten m_a von $\overline{BC(t)}$ und der Höhe h_c zur Seite \overline{AB}
- Schnittpunkt Q der Seitenhalbierenden s_a von $\overline{BC(t)}$ und der Höhe h_c zur Seite \overline{AB}

M 7 Folie zu M 4 und M 5

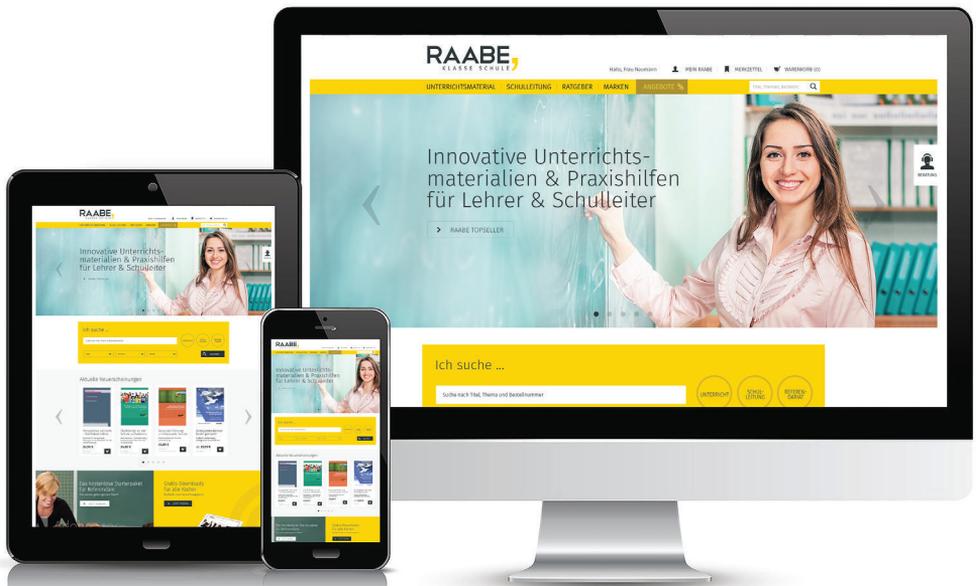
Zur Aufgabe 1 von **M 4** – Ortskurve des Schnittpunktes S der Seitenhalbierenden, wenn C auf dem Kreis $x^2 + (y-8)^2 = 2^2$ gleitet:



Zur Aufgabe 2 von **M 5** – Ortskurve des Schnittpunktes S der Seitenhalbierenden, wenn C auf der Parabel $y(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + 4$ gleitet:



Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de