Über Kegel, die eine Kugel enthalten

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

© baibaz/iStock/Getty Images Plus

Nehmen wir einmal an, die Eiskugeln schmelzen. Dann ist die kegelförmige Eistüte mit Wasser gefüllt. Oder konkreter: Was passiert mit dem Wasserspiegel, wenn man die Inkugel aus einem auf der Spitze stehenden, vollständig mit Wasser gefüllten Kegel entfernt? Versucht man dieses oder ähnliche Probleme zu lösen, sind verschiedene Teilgebiete der Mathematik hilfreich. So können beispielsweise Kenntnisse aus elementarer Geometrie, analytischer Geometrie oder der Analysis hier vernetzt werden.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Ann… Wittnebel
Satz: …ser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © baibaz/iStock/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zappe, Ilmenau
Lektorat: M…a Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Über Kegel, die eine Kugel enthalten

Oberstufe (Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

Die Schüler lernen:

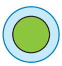
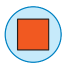
- Mathematische Modelle für ein reales Problem aufzustellen,
- überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse zu entwickeln,
- Strategien zur Lösung eines komplexeren Problems anzuwenden,
- verschiedene Lösungswege zu beurteilen,
- digitale Mathematikwerkzeuge auszuwählen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Informationen und Modellierung	M 1	Ab
Aufgaben	M 2	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Über Kegel, die eine Kugel enthalten

Einstieg:

Konfrontieren Sie Ihre Schülerinnen und Schüler[1] mit folgendem Problem (Lehrervortrag mit Demonstrationsexperiment):

In einem vollständig mit Wasser gefüllten Kegel mit der Höhe h = 10,0 cm und dem Grundkreisradius s = 5,0 cm liegt eine Kugel. Die Kugel ist so beschaffen, dass sie den Kegelmantel und auch die Wasseroberfläche berührt.

Wie hoch steht das Wasser im Kegel, wenn ma die Kugel entfernt?

Geben Sie zunächst einen Schätzwert an.

Sammeln Sie Ideen für eine rechnerische Lösung ses Problems.

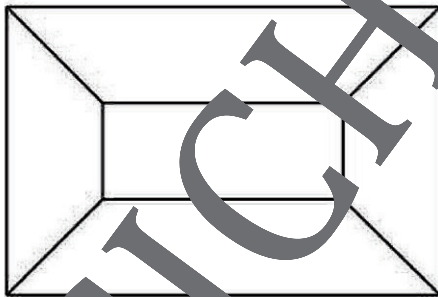
© Dr. Wi Zappe

Methodische Hinweise:

Die Materialien für eine reale Veranschaulic g sind rasch zu beschaffen. Ein solches Modell eines Hohlkegels wir ermutlich in ast jeder Sammlung mathematischer Lehrmittel der Schule finden. W n si passende Kugel in der Sammlung befindet, können Styroporkugeln (Durc esser 6 cm) in einem Bastel- oder Schreibwarengeschäft oder über das ernet erw en werden. Lassen Sie Ihre Schüler zunächst Schätzungen vo hmen, Sie die Kugel wirklich herausnehmen. Die Schätzungen können ein brauchba Material ergeben, um einige Eigenschaften der **beschreibenden Stati** iederhol Mittelwerte, Standardabweichung).

[1] A den der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler" verwendet.

In der Phase der Ideensammlung kann die Methode der „Platzdeckchen" hilfreich sein. Die Klasse/der Kurs teilt sich dafür in Vierergruppen auf.



© Dr. Wilfried Zappe

Jede Gruppe erhält ein DIN-A3-Blatt, das in vier äußere Felder und einen zentralen Bereich eingeteilt ist.
Jedes Gruppenmitglied notiert zunächst in Stillarbeit in seinem äußeren Feld seine eigenen Ideen. Danach wird das Blatt gedreht, sodass jeder die Notizen der anderen Gruppenmitglieder lesen kann.
Schließlich einigt man sich in der Gruppe auf die Ideen, die man für besonders „fruchtbar" hält, und trägt sie in das mittlere Feld ein.
Im Anschluss werden die Ideensammlungen der Gruppen verglichen und zu einer „Bearbeitungsstrategie" zusammengefasst.

Das weitere Vorgehen hängt u. a. davon ab, welche Ergebnisse die Phase der Ideensammlung gebracht hat. Es ist beispielsweise denkbar, jeden Schüler individuell mit der Lösungsfindung zu betrauen, eventuell gestützt durch eine Auswahl von Aufgaben aus der nachfolgend aufgeführten Aufgabensammlung. Die Bearbeitung des Problems kann aber auch in Partner- oder weiterer Gruppenarbeit oder durch ein gezieltes Lehrer-Schüler-Gespräch erfolgen.
Welche der Aufgaben ausgewählt werden, das hängt von der Jahrgangsstufe und auch von den zur Verfügung stehenden digitalen Mathematikwerkzeugen sowie der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit ab.

Hinweis: Einige Aufgaben sollen mithilfe von Software gelöst werden. Dafür bieten sich die kostenlosen Online-Versionen von GeoGebra an (kein Download und keine Anmeldung notwendig und auch auf dem Smartphone verwendbar):

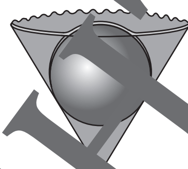
- *CAS-Rechner:* *https://www.geogebra.org/cas*
- *DGS:* *https://www.geogebra.org/classic*

Die CAS-Rechnungen und DGS-Bilder im Beitrag wurden zum Teil mit TI-Nspire erstellt.

M 1 Ideen zur mathematischen Modellierung

Der Sachverhalt ist gegeben als ein auf der Spitze stehender gerader Kreiskegel mit der Höhe h und dem Grundkreisradius s mit seiner Inkugel, die einen Radius r hat.

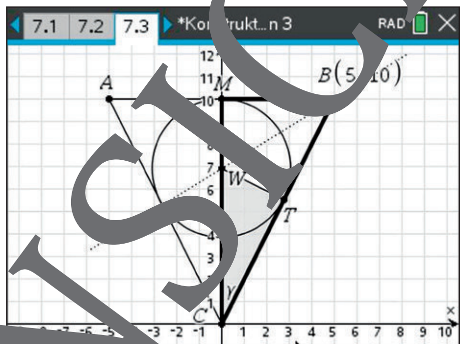
Nützlich zur Veranschaulichung ist ein Achsenschnitt, der ggf. in ein kartesisches Koordinatensystem gelegt wird.


© Dr. Wilfried Zappe

Im Achsenschnitt ergibt das Modell ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Inkreis.

Der Radius des Inkreises steht senkrecht zu den Dreiecksseiten.

Radius und Berührpunkt lassen sich mithilfe der Analysis bestimmen:



© Dr. Wilfried Zappe

Die Gerade g_{BC} ist Tangente am Kreis k. Für g_{BC} und den Kreis k lassen sich Funktionsgleichungen angeben. Im Punkt T, dem Berührpunkt von g und k, müssen die Funktionswerte und die Anstiege übereinstimmen. Der Punkt T liegt auf dem unteren, zu k gehörenden Halbkreis. Wenn die Kugel aus dem Kegel entfernt wird, dann bleibt ein Restvolumen, das sich aus der Differenz der Volumina von Kegel und Kugel ergibt.

Die Volumina von Kegel und Kugel lassen sich durch bekannte Formeln berechnen.

Das Restvolumen hat die Form eines zum gegebenen Kegel ähnlichen Kegels.

Da man das Restvolumen kennt, kann daraus die Höhe des Wasserstandes berechnet werden.

Alternative Lösungsideen:

Elementargeometrisch:

Im Achsenschnitt kommen ähnliche Dreiecke vor. In ähnlichen Dreiecken stehen Längen einander entsprechender Seiten im gleichen Verhältnis.

Mithilfe analytischer Geometrie:

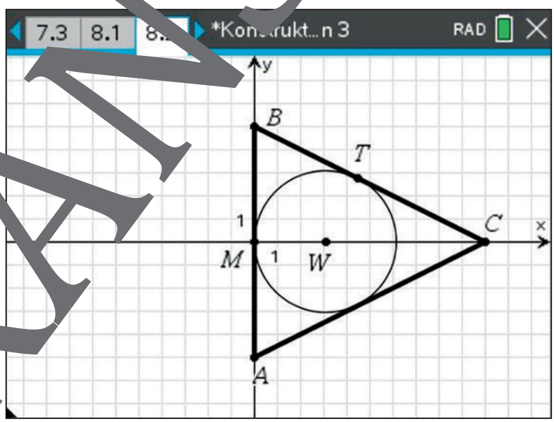
Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkel albierenden.

Die Gleichung der Winkelhalbierenden g_{WB} kann in vektorielle orm angege n werden. Man kennt den Ortsvektor von B. Der Richtungsvektor er Wink lbieren en kann als Summe der normierten Richtungsvektoren der den Winke schließenden Geraden angegeben werden.

Auch die Mittelsenkrechte des Dreiecks ist ein Winkelh rende.

Mithilfe der Analysis:

Denken Sie sich dazu den Achsenschnitt um 90° gedreht und geeignet verschoben, so wie es die nebenstehende Abbildung zeigt.



© Dr. Wilfried Zappe

Der Inkreis und die Gerade g_{BC} berühren sich tangent

Am Berührpunk T mu en die Funktionswe owi Anstiege übereinstimm

Die b notigte Volumi lassen sich als Rot onsvolu en echnen, eb nso kann die Restwasserhöhe als Integrationsgrenze bestimmt wer en.

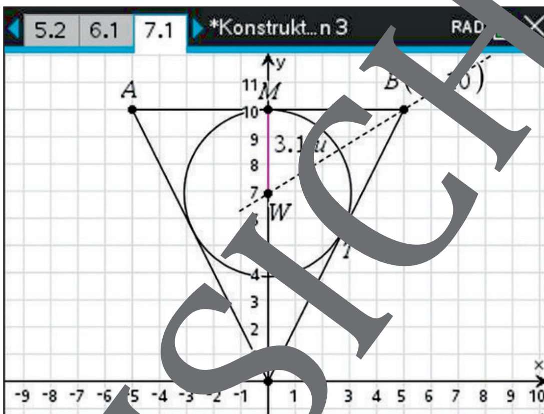
M 2 Aufgaben

Aufgabe 1, Konstruktion und Auswertung eines Achsenschnittes:

Konstruieren Sie mit einer Dynamische-Geometrie-Software (DGS) den Achsenschnitt eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels mit der Höhe h = 10 cm und dem Grundkreisradius s = 5 cm mit seiner Inkugel, die einen Radius r hat.

Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion.

Entnehmen Sie Ihrer Konstruktion einen Messwert für den Radius der Inkugel.



© Dr. Wilfried Zappe

Aufgabe 2, Berechnung der Restwasserhöhe nach dem Entfernen der Kugel:

In einen auf der Spitze stehenden Kegel mit der Höhe h = 10 cm und dem Grundkreisradius s = 5 cm wird eine Kugel mit dem Radius r gelegt. Anschließend wird der Kegel vollständig mit Wasser gefüllt. Der Radius r der Kugel ist so beschaffen, dass die Kugel außer dem Kegelmantel auch gerade die Wasseroberfläche berührt.

Berechnen Sie den Kugelradius sowie die Restwasserhöhe im Kegel, nachdem die Kugel dem Kegel wieder entnommen wurde.


© Dr. Wilfried Zappe

Aufgabe 3, Schülerexperimente

Bauen Sie einen Kegel mit der Höhe h = 10 cm und dem Grundkreisradius s = 5 cm aus etwas stärkerem Papier. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Legen Sie die bereitgestellte Styroporkugel (r = 3 cm) in den Kegel und prüfen Sie, ob sie die Berührbedingungen der Aufgabe erfüllt (eine Inkugel ist).

Füllen Sie den Kegel, der die Kugel enthält, vollständig mit Salz oder einem anderen geeigneten trockenen Schüttgut. Entnehmen Sie danach die Kugel und ermitteln Sie nach dem Glätten der Oberfläche des Schüttgutes, um wie viel Zentimeter die Höhe der Füllung abgenommen hat. Vergleichen Sie Ihren Messwert mit dem rechnerisch ermittelten Wert.

Führen Sie eine Fehlerbetrachtung durch.

Aufgabe 4, Radius der Inkugel bei variablem Grundkreisradius:

Untersuchen Sie (etwa mit verschiedenen Kegeln und Kugeln oder mithilfe einer DGS), wie groß der Radius r der Inkugel höchstens werden kann, wenn der Kegel die feste Höhe h hat und der Grundkreisradius s variabel bleibt.

Aufgabe 5, Berechnung des Grundkreisradius bei gegebenem Inkugelradius:

Berechnen Sie, welchen Grundkreisradius s der Kegel mit der Höhe h = 10 cm hat, wenn die Inkugel einen Radius von r = [illegible] cm hat.

Variationen der Aufgabenstellung lassen sich z. B. erzielen durch Weglassen oder Ergänzen von Bedingungen.

Aufgabe 6, Variieren durch Weglassen der Bedingung „Inkugel“:

Untersuchen Sie rechnerisch und geometrisch (DGS verwenden!), wie tief eine Kugel mit dem Radius r = [illegible] cm in einen Kegel einsinkt, der eine Höhe h von 10 cm und einen Grundkreisradius s von 5 cm besitzt.

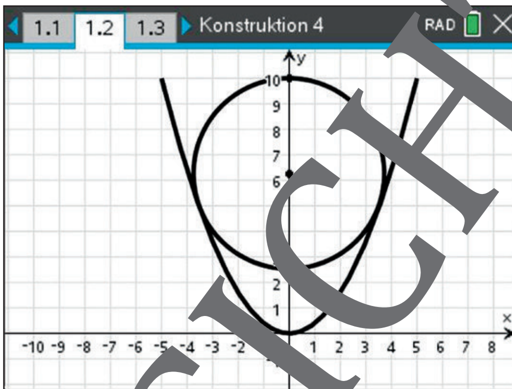
Aufgabe 7, Variieren durch Verändern der Gefäßform:

Gegeben sei ein Weinglas, dessen Kelch einen parabelförmigen Achsenschnitt hat (siehe Zeichnung). In dem vollständig mit Wasser gefüllten Glas liegt eine Kugel, die die Wand und die Wasseroberfläche berührt.

Welche Gleichung hat die Parabel?

Welchen Radius hat die Kugel?

Wie hoch steht das Wasser in dem Glas, wenn man die Kugel entfernt?

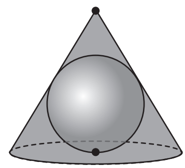


© Dr. Wilfried Zappe

Hinweis: Verwenden Sie für die Aufgabe einen CAS-Rechner.

Aufgabe 8, Variieren durch eine andere „Blickrichtung" auf den Sachverhalt:

Eine Kugel mit dem Radius r = 7 cm soll vollständig von einem Kegel mit minimaler Oberfläche umschlossen werden. Die Kugel soll den Kegelmantel und die Grundfläche des Kegels berühren, also die Inkugel des Kegels sein.



© Dr. Wilfried Zappe

Hinweis:

Verwenden Sie für die Aufgabe einen CAS-Rechner.