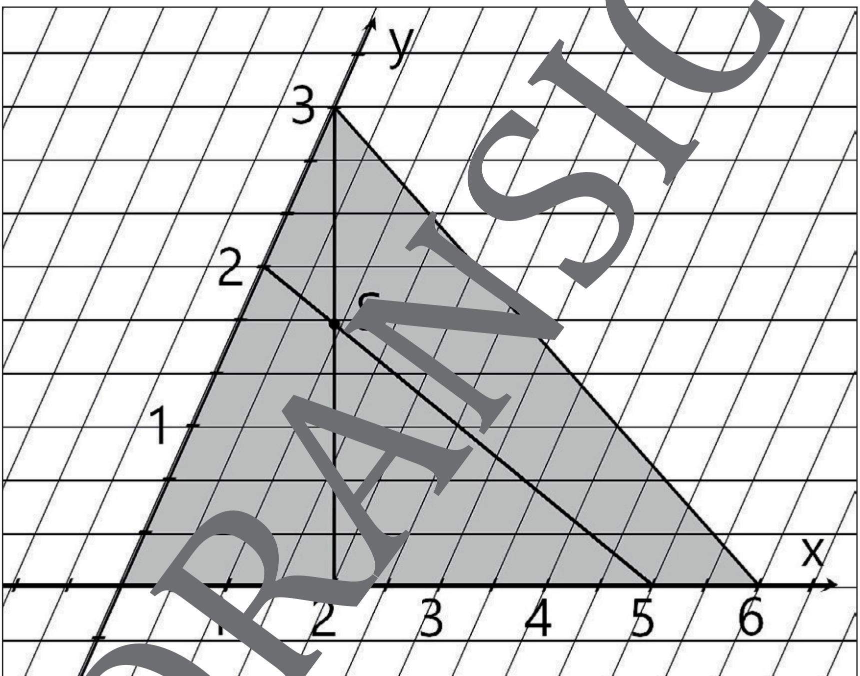
Bestimmung von Teilverhältnissen mit affinen Koordinaten

Peter Bunzel, Rottweil
Illustrationen: Peter Bunzel, Rottweil, und Mona Hitzenauer, Regensburg



Grafik: Mona Hitzenauer

Koordinatenachsen, die nicht senkrecht aufeinanderstehen? Und auch noch verschiedene Einheiten auf den Achsen? Mit diesem Beitrag fordern Sie Ihre Schülerinnen und Schüler auf, Koordinatensysteme aus einem neuen Blickwinkel zu betrachten. Sie lernen, dass sie damit sogar schneller zum Ergebnis kommen können. Trotzdem greifen sie dabei auf Bekanntes wie Parametergleichungen und Schnittpunkte von Geraden zurück.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Ann[illegible]ta Wittnebel
Satz: [illegible]ser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Mona Hitzenauer, Regensburg
Illustrationen: Peter Bunzel, Rottweil, und Mona Hitzenauer, Regensburg
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Bestimmung von Teilverhältnissen mit affinen Koordinaten

Oberstufe (erhöht)

Peter Bunzel, Rottweil
Illustrationen: Peter Bunzel, Rottweil, und Mona Hitzenauer, Regensburg

Die Schüler lernen:

affine Koordinaten mithilfe von schrittweise erklärten Beispielen kennen. Sie erarbeiten sich die Berechnung von Teilverhältnissen mit affinen Koordinaten an zahlreichen Aufgaben.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Teilverhältnisse im $\mathbb{R}^2$	M1	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Kompetenzprofil:

Inhalt: affine Koordinaten(-systeme), Geradengleichungen in Parameterform, Schnittpunkte von Geraden, Teilverhältnisse von Strecken, Strahlensatz

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise zu Teilverhältnissen mit affinen Koordinaten

Die „Teilverhältnisse" finden sich im Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg (gültig ab 1. August 2018)[1]:

Q3 3. Kurshalbjahr: Analytische Geometrie

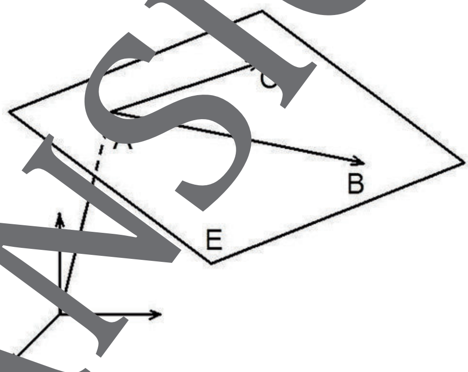
Inhaltsbezogene Kompetenzen (Grund- und Leistungskursfach):

Die Schülerinnen und Schüler[2] können …

… geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren und im Koordinatensystem darstellen, (L3 (Raum und Form); Inhalte: Teilverhältnisse von Strecken)

„Affine Koordinaten" kommen in allen Bundesländern vor, nämlich bei den **Parameterdarstellungen von Ebenen** und beim **Erstellen von Schrägbildern**. Dieser Beitrag kann auf zwei Arten eingesetzt werden:

- bei der Bestimmung von Teilverhältnissen,
- im Zusammenhang mit der Einführung von Ebenengleichungen in Parameterform.



Grafik: Peter Bunzel

Lernvoraussetzungen: Parametergleichungen von Geraden müssen bekannt sein.

Ablauf: Nach der Vorstellung des Verfahrens und den beiden einführenden Beispielen bearbeiten die Schüler/-innen in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit die Aufgaben 1 bis 5.

---

1 https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2018/RLP_GOST_Mathematik_BB_2018.pdf (zuletzt aufgerufen am 23.11.2020)

2 Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler" verwendet.

M 1 Teilverhältnisse im $\mathbb{R}^2$

Theorie und Beispiele

Sucht man bei speziellen Figuren Teilverhältnisse, so bestimmt man sie häufig mit dem Verfahren des geschlossenen Vektorzugs.

Man kann sie aber auch mithilfe von „affinen Koordinaten" bestimmen. Die Unterschiede zu „kartesischen Koordinaten" sind in der folgenden Tabelle notiert:

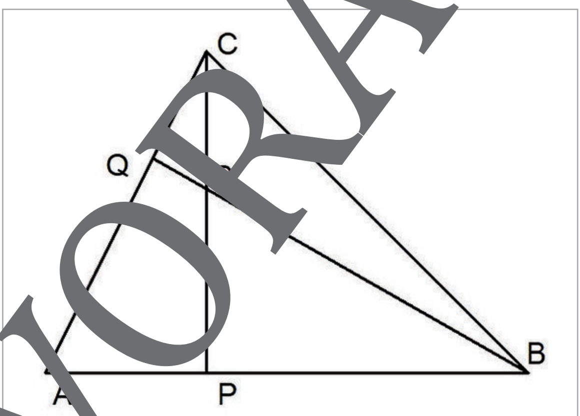
Kartesische Koordinaten	Affine Koordinaten
Die Koordinatenachsen stehen (paarweise) senkrecht zueinander. Die Einheiten auf allen Koordinatenachsen sind gleich lang.	Die Koordinatenachsen müssen nicht senkrecht zueinander stehen. Die Einheiten auf den Koordinatenachsen müssen nicht gleich lang sein.

Beschreibung des Verfahrens an einem Beispiel

Der Punkt P teilt die Strecke [AB] im Verhältnis 1:2.

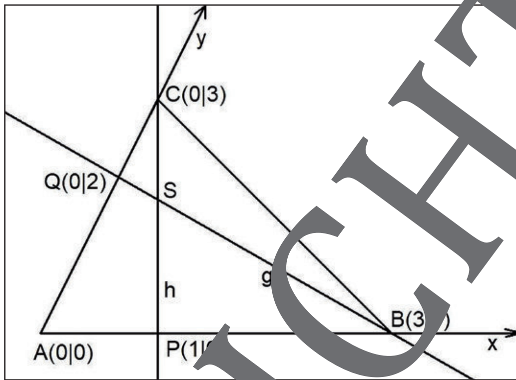
Der Punkt Q teilt die Strecke [AC] im Verhältnis 2:1.

Gesucht sind die Verhältnisse, in denen sich die Strecken [CP] und [BQ] teilen.



Grafik: [illegible] Bunzel

– Zunächst wird ein geeignetes Koordinatensystem gewählt.
  Wir legen den Ursprung in den Punkt A, die x-Achse geht durch A und B, die y-Achse durch A und C.
  Da die Strecke [AB] im Verhältnis 1:2, also in drei gleiche Teile geteilt werden kann, ist es günstig, dem Punkt B die Koordinaten (3|0) zu geben. Entsprechend erhält der Punkt C die Koordinaten (0|3). Dann gilt: P(1|0) und Q(0|2).



Grafik: Peter Bunzel

– Als Nächstes werden die Gleichungen für zwei Geraden aufgestellt.

Gerade g durch B und Q: $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gerade h durch C und P: $\vec{x} = \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

– Wir bestimmen den Schnittpunkt S von g und h:

I	$3 - 3r = s$
II	$2r = 3 - 3s$

$3 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad 9 - 9r + 2r = 3s + 3 - 3s \quad \Leftrightarrow 9 - 7r = 3 \quad \Leftrightarrow 6 = 7r \Leftrightarrow r = \frac{6}{7}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BS} = \frac{6}{7}\overrightarrow{BQ} \quad \Rightarrow \overrightarrow{SQ} = \frac{1}{7}\overrightarrow{BQ}$

Der Punkt S teilt also die Strecke [BQ] im Verhältnis $\frac{6}{7} : \frac{1}{7} = 6 : 1$

$3 - 3r = s \Rightarrow 3 - \frac{18}{7} = s \quad \Rightarrow s = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \overrightarrow{CS} = \frac{3}{7}\overrightarrow{CP} \quad \Rightarrow \overrightarrow{SP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CP}$

Der Punkt S teilt also die Strecke [CP] im Verhältnis $\frac{3}{7} : \frac{4}{7} = 3 : 4$.

Rechtfertigung des Verfahrens

Ist man zum ersten Mal mit dem angewendeten Verfahren konfrontiert, so hat man unweigerlich das Gefühl, mit dem angeführten „Beweis“ hätte man nur einen Sonderfall bewiesen, insbesondere, wenn man die besondere (orthogonale) Lage der Strecken [PC] und [PB] betrachtet. Das häufig verwendete Verfahren des „geschlossenen Vektorzugs“ scheint dagegen allgemeingültig zu sein.

Tatsächlich ist der Beweis mit affinen Koordinaten jedoch genauso allgemeingültig.
Und die (scheinbare) Orthogonalität von [PC] und [PB] wird an keiner Stelle verwendet.
Beim Verfahren des geschlossenen Vektorzugs verwendet man z. B. die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

Diese lineare Unabhängigkeit ist auch bei der Verwendung von affinen Koordinaten der entscheidende Punkt. Als Basis verwendet man hier die Vektoren $e_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ und $e_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Damit ist dann z. B. $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \vec{e}_1$ oder kurz $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hat man an dieser Stelle immer noch ein ungutes Gefühl, so könnte man – um Verwechslungen mit kartesischen Koordinaten zu vermeiden – für affine Koordinaten eine andere Schreibweise verwenden. Eine Möglichkeit wäre z. B. die Verwendung von eckigen Klammern:

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $B\left[3|0\right]$

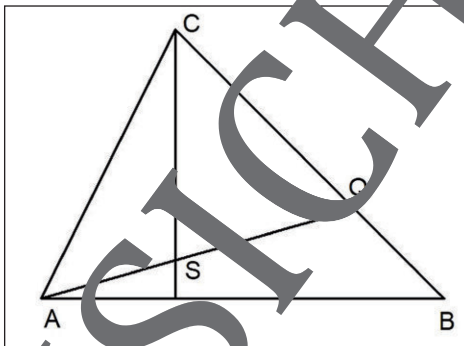
Da sich an den Rechnungen nichts ändert, soll diese spezielle Schreibweise nicht weiter verwendet werden.

Bemerkung: Man könnte alle Aussagen über Teilverhältnisse an speziellen Vielecken (oder Körpern) auch mit kartesischen Koordinaten beweisen. Diese Teilverhältnisse bleiben erhalten, wenn man Streckungen und/oder Scherungen durchführt.

Zweites Beispiel

Der Punkt P teilt die Strecke [AB] im Verhältnis 1:2. Der Punkt Q teilt die Strecke [CB] im Verhältnis 2:1.

Gesucht sind die Verhältnisse, in denen sich die Strecken [CP] und [AQ] teilen.



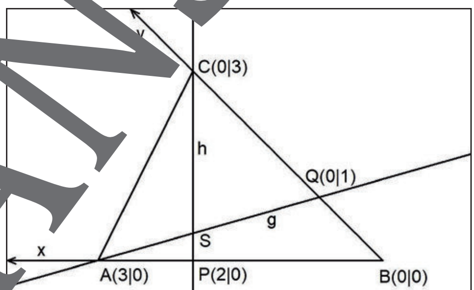
Grafik: Peter Bunzel

- Geeignetes Koordinatensystem:
  Der Ursprung wird sinnvollerweise in den Punkt B gelegt, die x-Achse geht durch die Strecke [BA] und zeigt nach links. Die y-Achse geht durch [BC] und zeigt nach links oben. Wählt man A(3|0) und C(0|3), so gilt: P(2|0) und Q(0|1).
- Geradengleichungen:
  Gerade g durch A und Q:

$$\vec{x} = \overrightarrow{BA} + r \cdot \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade h durch C und P:

$$\vec{x} = \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Grafik: Peter Bunzel

- Schnittpunk von g und h:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 3-3r = 2s \\ \text{II} & r = 3-3s \\ \hline \text{I}+3\cdot\text{II} & 3-3r+3r = 2s+9-9s \end{array}$$

$$3 = 9-7s \Leftrightarrow 7s = 6 \Leftrightarrow s = \frac{6}{7}$$

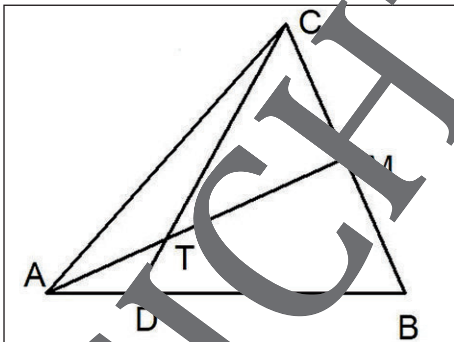
Der Punkt S teilt also die Strecke [CP] im Verhältnis $\frac{6}{7} : \frac{1}{7} = 6:1$.

Aus Gleichung (II) ergibt sich: $r = 3-3s = 3-\frac{18}{7} = \frac{3}{7}$.

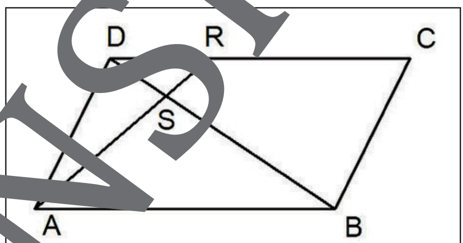
Der Punkt S teilt also die Strecke [AQ] im Verhältnis $\frac{3}{7} : \frac{4}{7} = 3:4$.

Aufgaben zu Teilverhältnissen im $\mathbb{R}^2$

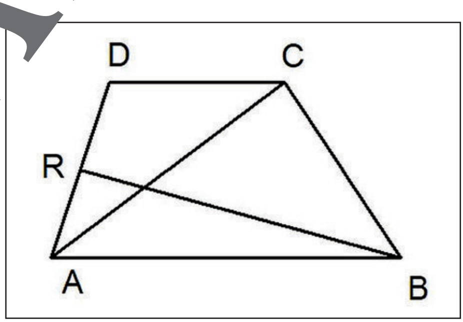
1. Im Dreieck ABC ist M die Mitte der Strecke [BC]. T teilt die Strecke [AM] im Verhältnis 2:3. Die Strecke [CD] verläuft durch T.
   In welchem Verhältnis wird diese Strecke [CD] durch T geteilt?



2. Im Parallelogramm ABCD teilt R die Strecke [DC] im Verhältnis 1:2.
   Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die Strecken [AR] und [BD] teilen.



3. Im Trapez ABCD ist die Strecke [DC] halb so lang wie die Strecke [AB].
   R ist die Mitte der Strecke [AD].
   Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die Strecken [AC] und [BR] teilen.

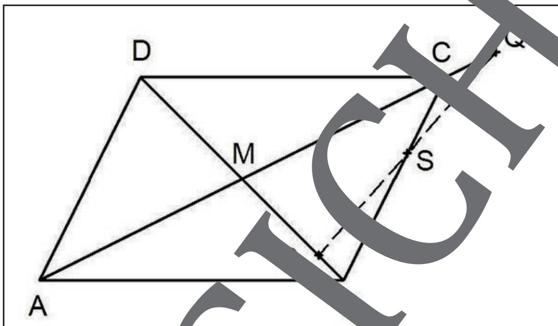


Alle Abbildungen: Grafik: Peter Bunzel

4. Beim Parallelogramm ABCD gilt für die Punkte P und Q:

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{MC} \text{ und } \overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MB}.$$

Die Strecken [BC] und [PQ] schneiden sich im Punkt S.
In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecke [BC]?

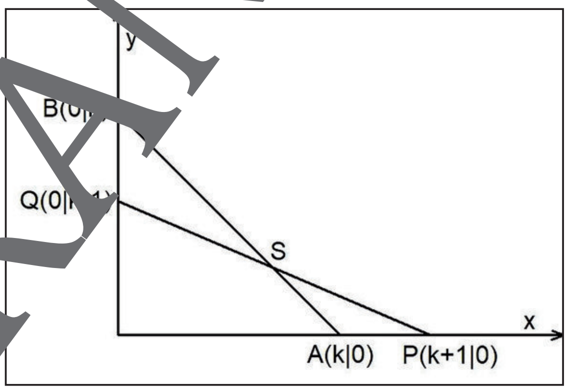


Grafik: Peter Bunzel

5. In einem kartesischen Koordinatensystem gelte für die Punkte P und Q:

$$P(k+1|0) \text{ und } Q(0|k-1)$$

In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecken [AB] und [PQ] (siehe Abbildung)?
Nehmen Sie Bezug auf Ihre Ergebnisse aus der Aufgabe 4.



Grafik: Peter Bunzel

Lösungen

1. **Geeignetes Koordinatensystem:**

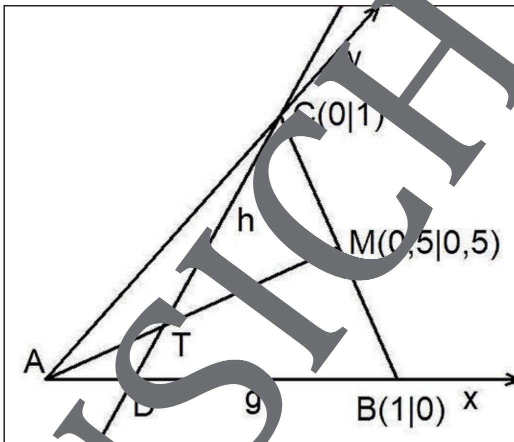
Der Ursprung wird sinnvollerweise in den Punkt A gelegt, die x-Achse geht durch die Strecke [AB] und die y-Achse geht durch die Strecke [AC].

Wählt man B(1|0) und C(0|1), so gilt: M(0,5|0,5).

Da T die Strecke [AM] im Teilverhältnis 2:3 teilt, gilt:

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Daher ist T(0,2|0,2).



Grafik: Peter B...zel

Geradengleichungen:

Gerade g durch A und B: $\vec{x} = r\cdot\overrightarrow{AB} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Gerade h durch C und T: $\vec{x} = \overrightarrow{AC} + s\cdot\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0{,}2-0\\0{,}2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0{,}2\\-0{,}8\end{pmatrix}$

Schnittpunkt von g und h:

I $r = 0{,}2s$

II $0 = 1 - 0{,}8s \quad \Rightarrow 0{,}8s = 1 \quad \Rightarrow s = \frac{1}{0{,}8} = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CT} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{CT} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow$ T teilt die Strecke [CD] im Verhältnis $\frac{4}{4}:\frac{1}{4} = 4:1$.