Normalformen affiner Abbildungen

Dr. Jürgen Bohla, Wuppertal
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz, Hamburg

Abbildungen, die Eigenschaften von Objekten wie Winkel, Parallelität und Teilverhältnisse erhalten, spielen in vielen Bereichen von Wissenschaft und Technik, etwa Bildbearbeitung oder Kartografie, eine wichtige Rolle. Es handelt sich dabei um die Translation, Drehung, Spiegelung und zentrische Streckung/Stauchung. Alle diese Operationen können mit affinen Abbildungen dargestellt werden. Wählt man für einen linearen Vektorraum eine feste Basis aus Einheitsvektoren, lassen sich affine Abbildungen durch Matrizen darstellen. Die Kenntnis von Eigenwerten und Eigenvektoren und der Normalform einer solchen Abbildung bzw. ihrer darstellenden Matrix ermöglicht vielfältige Berechnungen. Diese mathematischen Konzepte werden hier Schritt für Schritt erklärt und eingeübt.

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Annegrete Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © blackred/E+/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz, Hamburg
Lektorat: Dr. Yvonne Raden, Nortorf, Dr. Jürgen Leitz, Hamburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Normalformen affiner Abbildungen

Oberstufe (Niveau)

Dr. Jürgen Bohla, Wuppertal
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz, Hamburg

Die Schüler lernen:

Abbildungen kennen, die Eigenschaften von Objekten wie Winkel, Parallelität und Teilverhältnisse erhalten: Translation, Drehung, Spiegelung und zentrische Streckung/Stauchung. Wählt man in einem linearen Vektorraum eine feste Basis aus Einheitsvektoren, lassen sich affine Abbildungen durch Matrizen darstellen. Die Kenntnis von Eigenwerten und Eigenvektoren und der Normalform einer solchen Abbildung bzw. ihrer darstellenden Matrix ermöglicht vielfältige Berechnungen. Diese mathematischen Konzepte werden hier Schritt für Schritt erklärt und eingeübt.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Normalformen linearer Abbildungen	M1	Ab
Transformation in Normalform – Hausaufgabe	M2	Ab
Komposition von Abbildungen	M3	Ab
Die Umkehrabbildung	M4	Ab
Affine Abbildungen und ihre Analyse	M5	Ab
Drehung als Kongruenz-/ Ähnlichkeitsabbildung	M6	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: Affine Abbildungen, wie Translation, Drehung, Spiegelung, zentrische Streckung und Stauchung, Basisvektor, Abbildungsmatrix, Eigenwert, Eigenvektor, Normalform
Medien: GTR/CAS, GeoGebra
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

M 1 Normalformen linearer Abbildungen

Das Orthonormalsystem mit der aus den Einheitsvektoren $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$ bestehenden **Standardbasis** ist eine mögliche Basis im $\mathbb{R}^2$, um eine Abbildung zu definieren. Oftmals lässt sich dieselbe Abbildung aber zweckmäßiger durch eine andere, einfachere Basis beschreiben. Dadurch entsteht ein anderes, i. d. R. **nichtkartesisches Koordinatensystem**.

Nur **linear unabhängige Vektoren** können eine **Basis** bilden. Den Übergang von einer Basis auf eine andere Basis bezeichnet man als **Basistransformation**. Mit dem Übergang auf eine andere Basis ändern sich die Koordinaten von Urbildpunkt und Bildpunkt. Ein solcher Basiswechsel ist vor allem dann sinnvoll, wenn sich dadurch die Abbildung vereinfachen lässt. Unter allen möglichen Vektoren einer Abbildung nehmen die **Eigenvektoren** als auf sich selbst abbildende Vektoren eine Sonderstellung ein. Daher liegt es nahe, die Eigenvektoren als Basis der Abbildung zu wählen. Man nennt diese Form der Abbildung dann **Normalform**.

Aufgabe

Wir betrachten die beiden linearen Abbildungen:

$$a:\ \vec{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \quad \text{und} \quad b:\ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & [illegible] \end{pmatrix} \cdot \vec{x}.$$

Diese Abbildungen sollen in die Normalform umgewandelt werden.

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildungen.

b) Untersuchen Sie diese Abbildungen mit einem oder zwei verschiedenen Eigenwerten und transformieren Sie die Abbildung aus der bisherigen Basis in die neue Basis mit den Eigenvektoren als Basisvektoren. Leiten Sie daraus die Normalform ab, zunächst in allgemeiner Form, dann für Abbildung A bzw. Abbildung B.

c) Berechnen Sie für das Dreieck P(2|0), Q(0|2), R(2|2) das Bilddreieck nach der ursprünglichen Abbildungsgleichung und nach der Normalform. Stellen Sie den Zusammenhang von ursprünglicher Abbildung und Normalform für Abbildung a und den Punkt [illegible] grafisch dar.

M 2 Transformation in Normalform – Hausaufgabe

1. Gegeben ist die Abbildung $c: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

   Wie lautet bei diesem Abbildungstyp die Normalform?

2. Gegeben ist die Abbildung $d: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

   a) Ermitteln Sie eine Normalform der Abbildung. Berechnen Sie für das Dreieck $P(0|0)$, $Q(2|1)$, $R(1|2)$ das Bilddreieck nach der ursprünglichen Abbildungsgleichung und der Normalform D^*. Welchen Abbildungstyp stellt die Normalform dar?

   b) Zeigen Sie an dieser Aufgabe, dass man die Abbildungsmatrix D^* der Normalform auch mit der Matrizengleichung $D^* = T^{-1}DT$ mit T als „**Transformationsmatrix**" berechnen kann. Die Spaltenvektoren von T sind dabei die Eigenvektoren der durch D* vermittelten linearen Abbildung. T^{-1} ist die zugehörige inverse Matrix von T.

Arbeitsschritte zur Bildung der Normalform und Berechnung der Abbildung:

Gegeben: Abbildung $a: \vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ im Koordinatensystem $\{\vec{e}_1;\ \vec{e}_2\}$.

Voraussetzung: A hat zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 und zwei Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

Schritt 1: Eigenwerte λ_1, λ_2, Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und Koordinatensystem $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ermitteln. Damit erhält man die Abbildungsmatrix $A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ der Normalform.

Schritt 2: Urbildpunkt X ist bei Abbildung $a: \vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ bekannt und Bildpunkt X' ist zu berechnen. Der (die) Urbildpunkt(e) X aus System A ist (sind) ins System B zu transformieren mit dem Gleichungssystem $\vec{x} = B \cdot \overrightarrow{x^*} \Rightarrow \overrightarrow{x^*} = B^{-1} \cdot \vec{x}$. $\overrightarrow{x^*}$ ist der Ortsvektor des im neuen System $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ berechneten Punktes X^*. Im neuen Koordinatensystem hat also die Abbildung a dann die Normalform a^* mit folgender Gestalt: $a^*: (\overrightarrow{x^*})' = (A^*) \cdot \overrightarrow{x^*} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x^*}$.

Nebenbemerkung: Für lineare Abbildungen mit einem Eigenwert oder ohne Eigenwerte können bei Zugrundelegung weiterer Voraussetzungen Normalformen abgeleitet werden.

M 3 Komposition von Abbildungen

Durch Verknüpfung mindestens zweier linearer Abbildungen können neue Abbildungen erzeugt werden. Eine Verknüpfung ist nur möglich, wenn die Voraussetzungen für die Durchführung der jeweiligen Verknüpfungsoperation erfüllt sind. Gegenstand dieser Lektion sind zwei Arten von Operationen mit linearen Abbildungen:

– die Verkettung/Komposition $a \circ b$ zweier linearer Abbildungen $a: \vec{x'} = A \cdot \vec{x}$ und $b: \vec{x'} = B \cdot \vec{x}$ sowie
– die Umkehrabbildung a^{-1} einer linearen Abbildung $a: \vec{x'} = A \cdot \vec{x}$.

Aufgabe: Verkettung/Komposition zweier linearer Abbildungen

Gegeben sind die beiden linearen Abbildungen $a: \vec{x'} = A \cdot \vec{x}$ und $b: \vec{x'} = B \cdot \vec{x}$ mit den Abbildungsmatrizen

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Unter der „Verkettung" zweier Abbildungen $a \circ b$ versteht man die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen im Sinne von „a nach b". Die „Verkettung" ist aber nicht als Addition oder Subtraktion zweier Abbildungen zu verstehen. Machen Sie sich diese Prozedur und ihre Wirkung auf die Abbildungen in einem Bild deutlich.

b) Wie lässt sich diese Abbildungsprozedur in eine Matrizenoperation übertragen? Was folgt daraus für die Verkettung von $a \circ b$ und $b \circ a$?

c) Bilden Sie die Verkettungen $a \circ b$ und $b \circ a$.

d) Berechnen Sie für das Dreieck P(2|0), Q(0|2), R(2|2) die Abbildungen a, b und $a \circ b$. Zeigen Sie, dass die Verkettung $a \circ b$ zum selben Ergebnis führt wie die Rechnung „a nach b".

M 4 Die Umkehrabbildung

Die lineare Abbildung sei eine bijektive, also eine umkehrbar eindeutige Abbildung. Der Zusammenhang zwischen der Abbildung a und ihrer Umkehrabbildung a^{-1} stellt sich folgendermaßen dar:

$a: \vec{x}' = A \cdot \vec{x} \;\Big|\cdot A^{-1}$ (von links) $\Rightarrow A^{-1} \cdot \vec{x}' = A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}$, wobei I die Einheitsmatrix sei. $\vec{x}'$ und $\vec{x}$ tauschen also die Rollen. Deshalb ist von a die Umkehrabbildung gerade die Abbildung $a^{-1}: \vec{x}' = A^{-1} \cdot \vec{x}$.

Anmerkung: A^{-1} ist die zu A inverse Matrix. Bei zweireihigen Matrizen vom Typ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt für die Berechnung folgende vereinfachte Formel:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Im Zusammenhang mit der Umkehrabbildung sind folgende Abbildungsmatrizen zu untersuchen:

1. $a: A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $b: A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe

a) Ermitteln Sie die Umkehrabbildung zu 1. und berechnen Sie das Bilddreieck von $P(-2|2)$, $Q(1|-3)$, $R(2|1)$ für Abbildung a und ihre Umkehrabbildung a^{-1}.

b) Ermitteln Sie die Umkehrabbildung zu 2. und zeigen Sie am Beispiel der Geraden g, dass sowohl Abbildung b als auch ihre Umkehrabbildung b^{-1} „geradentreue" Abbildungen sind, d. h. Abbildungen, die eine Gerade wieder auf eine Gerade abbilden.

Hausaufgabe und Tafelbild zur Umkehrabbildung

1. Welche Eigenschaften müssen bei der Abbildungsmatrix A für die Berechnung einer Umkehrabbildung vorliegen?
2. Wie lautet die Umkehrabbildung zur Abbildung $a: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$?
3. Geben Sie die Matrixdarstellung a und a^{-1} für die Parallelstreckung mit der Streckachse $s: x_1 - x_2 = 0$ in Richtung x_2-Achse mit dem Streckfaktor $k = 0{,}5$ an.

   Zur Veranschaulichung und Berechnung der Inhalte kann auch das EXCEL-Programm affab.xls, Registerblatt „Abbildungen im $\mathbb{R}^2$“, Optionen: „Umkehrabbildung“, „Verkettung von Abbildungen“, siehe Archiv eingesetzt werden.
4. Begründen Sie: Jede zentrische Streckung lässt sich als Verkettung von zwei senkrechten Parallelstreckungen darstellen.
5. Gegeben sind die Abbildungen a und b mit den Abbildungsmatrizen
   $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie für das Dreieck $P(0|0)$, $Q(2|$[illegible]$)$, $R(1|2)$ die Bildpunkte unter den Abbildungen $a \circ b$ und $b \circ a$.

Zur Verkettung $a \circ b$ („a nach b“):
$b \circ a$
$\vec{x} \to \vec{x}' \to \vec{x}''$

Rechnerische Durchführung durch multiplikative Verknüpfung $A \cdot B$ nach den Regeln der Matrizenmultiplikation: „A von links“ – $a \circ b: \vec{x}'' = A \cdot B \cdot \vec{x}$.

Vorsicht:

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, i. A. gilt: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Zur Umkehrabbildung:

Der Zusammenhang von Abbildung a und ihrer Umkehrabbildung a^{-1}:
$a: \vec{x}' = A \cdot \vec{x} \quad |\cdot A^{-1}$ (von links) $\Rightarrow A^{-1}\vec{x}' = A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{x} = \vec{x}$, Rollentausch von $\vec{x}'$ und $\vec{x}$ $\Rightarrow$ Umkehrabbildung von a ist also $a^{-1}: \vec{x}' = A^{-1} \cdot \vec{x}$.

M 5 Affine Abbildungen und ihre Analyse

Vorbemerkung

Bei den linearen Abbildungen a wurde jeder Punkt X der Ebene im orthonormierten Koordinatensystem S durch seine Koordinaten x_1, x_2 beschrieben. In einem anderen Koordinatensystem $S(0',E_1',E_2')$ mit den Basisvektoren $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{O'E_1'}$, $\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{O'E_2'}$ wird demselben Punkt X der Ebene der Bildpunkt $X'(x_1' \mid x_2')$ zugeordnet. $S \to S'$ ist eine Abbildung der Punkte der Ebene „in sich". Ein Koordinatensystem kann aus der Basis $\{e_1, e_2\}$ in eine andere Basis $\{b_1, b_2\}$ transformiert werden.

Aus

$S: \overrightarrow{OX} = x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$ wird $S': \overrightarrow{O'X'} = p_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + p_2 \cdot \overrightarrow{b_2}$.

Für zwei Punkte P, Q und ihre Bildpunkte $P' = a(P)$, $Q' = a(Q)$ gilt dann:

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (q_1 - p_1) \cdot \overrightarrow{e_1} + (q_2 - p_2) \cdot \overrightarrow{e_2}$,

und für die durch a „induzierte" Abbildung

$a: \vec{v'} = \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{O'Q'} - \overrightarrow{O'P'} = (q_1 - p_1) \cdot \overrightarrow{b_1} + (q_2 - p_2) \cdot \overrightarrow{b_2}$,

d. h. die Vektorabbildung $\vec{v'} = a(\vec{v})$.

Wenn alle Berechnungen im ursprünglichen Koordinatensystem erfolgen, bleiben die arithmetischen Beziehungen von S und S' erhalten. Affine Invarianzen wie Geradentreue, Parallelentreue, Teilverhältnistreue bleiben unabhängig vom gewählten Koordinatensystem bestehen. Für den Ortsvektor $\vec{x'}$ des Punktes X' ergibt sich nach Definition der affinen Abbildung die folgende Linearkombination:

$\vec{x'} = \overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X'} = \overrightarrow{O'X'} + \overrightarrow{OO'} = a(O)a(X) + \overrightarrow{OO'} = a(\overrightarrow{OX}) + \overrightarrow{OO'} = a(\vec{x}) + \vec{t}$.

Die affine Abbildung entsteht als Summe der linearen Abbildung $a(\vec{x})$ und der Verschiebung (Translation) $\vec{t}$.

Affine Abbildungen und ihre Analyse – Aufgaben

Aufgabe 1

Durch folgende drei Punktepaare $(0), (E_1), (E_2)$ und $(0'), (E_1'), (E_2')$ sei eine affine Abbildung a' definiert:

Urbildpunkte im kartesischen System S $\rightarrow$ Bildpunkte im affinen System S'

$O(0|0)(\vec{o}) \rightarrow O'(2|1)$; $E_1(1|0)(\vec{e_1}) \rightarrow E_1'(4|2)$; $E_2(0|1)(\vec{e_2}) \rightarrow E_2'(3|5)$

a) Bestimmen Sie die affine Abbildungsgleichung in der Form $a': \vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{t}$.
Erklären Sie den Zusammenhang zwischen affiner und linearer Abbildung.
Für die Analyse affiner Abbildungen gelten im Wesentlichen die gleichen Grundsätze wie für die Analyse linearer Abbildungen. Untersuchen Sie daher die affine Abbildung auf Affinitätsverhältnis, Fixelemente und Eigenvektoren.

b) Fertigen Sie eine Zeichnung zur Aufgabe. Zeichnen Sie das affine System, bestehende Fixgeraden und das zum Urbilddreieck $(1|0)$, $(0|1)$ und $(1|1)$ gehörende Bilddreieck in dieses System ein.

Aufgabe 2

Die affine Abbildung

$$a': \vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{t} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{t}$$

beschreibt eine Scherung im affinen System.

Berechnen Sie Affinitätsverhältnis, Eigenwerte, Eigenräume und Fixelemente der Abbildung.

a) Bestimmen Sie für

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

– Affinitätsverhältnis,
– Eigenwerte und Eigenräume,
– Fixelemente.

b) Sei $\vec{t} = \vec{0}$. In welchen Typ der Abbildung geht dann a' für $b \rightarrow 0$ über?

Hausaufgabe und Tafelbild

a) Untersuchen Sie die affine Abbildung $a': \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ und bestimmen Sie den Abbildungstyp unter Beachtung des Satzes: Eine affine Abbildung ist genau dann eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn ihre Matrix von der Form

$a = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ oder $b = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

ist. Gilt zusätzlich $a^2 + b^2 = 1$, dann liegt eine Kongruenzabbildung vor.

b) Die Abbildung a' wird um den Translationsvektor $\vec{t}$ verschoben. Vom Punkt $P(-2|1)$ ist sein Bild $P'(1|2)$ im neuen Koordinatensystem bekannt. Wie lautet dann die Abbildungsgleichung?

Zur Veranschaulichung und Berechnung der Inhalte kann auch das EXCEL-Programm affab.xls, Registerblatt „Abbildungen im R^2“, Menüpunkte: „Lineare und Affine Abbildungen“, „Analyse der Abbildung“, „Abbildungsgleichungen berechnen“, siehe Archiv eingesetzt werden.

Für den Ortsvektor x′ des Punktes X′ ergibt sich nach Definition der affinen Abbildung
$\vec{x}' = \overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X'} = \overrightarrow{O'X'} + \overrightarrow{OO'} = $ [illegible] $(\overrightarrow{OX}) + \overrightarrow{OO'} = a(\vec{x}) + \vec{t}$.

Die affine Abbildung $a': \vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{t}$ entsteht als Komposition einer linearen Abbildung $A^* \vec{x}$ und der Translation (Verschiebung) $\vec{t}$. Affine Invarianzen wie Geradentreue, Parallelentreue, Teilverhältnistreue bestehen unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

Die Analyse affiner Abbildungen kann nach den folgenden Kriterien erfolgen:

1. Affinitätsverhältnis: det A
2. Eigenwerte: charakteristisches Polynom $\det(A - \lambda I) = 0$
3. Eigenvektoren und Eigenräume: homogenes LGS $(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = 0$
4. Fixelemente: Fixpunkte, Fixpunktgeraden $(A - I) \cdot \vec{f} = -\vec{t}$ bzw. Fixgeradenbedingung $(A - I) \cdot \vec{p} + \vec{t} = \lambda \vec{v}$

M 7 Drehung als Kongruenz-/Ähnlichkeitsabbildung

Unter den verschiedenen Typen von affinen Abbildungen kommt der Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildung und unter diesen wiederum der Drehung besondere Bedeutung zu, nicht nur in der analytischen Geometrie, sondern auch in der Anwendung der Mathematik z. B. in Konstruktion und Technik. Bei den verschiedenen Abbildungstypen wurden die identische Abbildung und die Drehung gegen den Uhrzeigersinn als Kongruenzabbildung und die zentrische Streckung als Ähnlichkeitsabbildung vorgestellt.
In dieser Lektion wird der Akzent auf „Drehungen" und ihre Analyse mithilfe der bisher erarbeiteten Analysewerkzeuge gelegt. Die vorliegenden Materialien sollen die selbstständige Erarbeitung in Einzel- oder Gruppenarbeit unter Anleitung des Lehrers ermöglichen.

Aufgabe 1

Die folgenden beiden affinen Abbildungen a und b beschreiben die Drehungen

$$a:\vec{x}'=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\vec{x},\quad b:\vec{x}'=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$$

mit α als positiv orientiertem (gegen den Uhrzeiger gerichtetetem) Drehwinkel.

a) Untersuchen Sie die Abbildungen im Hinblick auf Affinitätsverhältnis, Eigenwerte, Eigenvektoren und Fixelemente.

b) Berechnen Sie für $\alpha = 45°$ für a und b die Bilddreiecke zum Urbilddreieck $(0|1)$, $(1|0)$, $(1|1)$ und zeichnen Sie dazu das Schaubild.

c) Prüfen Sie, ob a und b die Kriterien einer Kongruenzabbildung erfüllen.

d) Prüfen Sie die Behauptung: Die Bildvektoren der Abbildungsmatrizen bilden ein Orthonormalsystem.

e) Wie lassen sich aus der Drehung andere spezielle Abbildungen wie Punktspiegelung im Ursprung und Achsenspiegelung an einer Koordinatenachse erklären?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Abbildung $a: \vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ mit $a: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

a) Die Struktur der Abbildungsmatrix A ähnelt offenbar der Abbildungsmatrix einer gleichsinnigen Drehung. Zeigen Sie den Zusammenhang zwischen A und der Drehmatix auf.

Hinweis: Ersetzen Sie für die Erarbeitung der Lösung die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ zunächst durch: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die Eigenschaften und bestimmen Sie den Typ der Abbildung.

b) Berechnen Sie das Bilddreieck zum Urbilddreieck $(0|1)$, $(1|$[illegible]$)$, $(1|1)$ und zeichnen Sie dazu das Schaubild.

c) Erklären Sie: Die Drehstreckung kann als eine Komposition (Verkettung) von zentrischer Streckung und Drehung dargestellt werden.

d) Durch den Translationsvektor $\vec{t} =$ [illegible] wird aus der Drehstreckung $a: \vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ die affine Drehstreckung $a: \vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{t}$.
Vergleichen Sie die Eigenschaften dieser Abbildung mit denen der Abbildung in a).

e) Eine affine Drehstreckung, bei der $\det A = 1$ ist, heißt affine Drehung und ist ein Sonderfall der affinen Drehstreckung.
Führen Sie die Umformung der Drehstreckung aus d) zur affinen Drehung durch.

Drehungen werden durch die folgenden beiden affinen Abbildungen a und b beschrieben:

$$a: \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{x}, \quad b: \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

mit α als positiv orientiertem Drehwinkel und $\det A = |\,1\,|$. Drehungen sind längen-, winkel-, flächentreue Kongruenzabbildungen mit dem Fixpunkt $F(f_1 \mid f_2)$ als Zentrum. Drehungen haben keine Eigenwerte und Fixgeraden.

Abbildungsmatrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad k = \sqrt{a^2 + b^2},$$

beschreiben winkeltreue Ähnlichkeitsabbildungen mit Fixpunkt/Zentrum $F(f_1 \mid f_2)$. Dazu gehören die zentrischen Streckungen und die Streckdrehungen. Ähnlichkeitsabbildungen können daher auch als Verkettungen/Kompositionen zentrischer Streckungen und Drehungen dagestellt werden.

Zur Veranschaulichung und Berechnung der Inhalte kann auch das Excel-Programm **affab.xls**, Registerblatt „Abbildungen im $\mathbb{R}^2$“, Menüpunkte: „Lineare und Affine Abbildungen“, „Analyse der Abbildung“, „Abbildungsgleichungen berechnen“, eingesetzt werden.