

# Die Euler'sche Gerade

Wolfgang Lübbe, Rostock

Illustrationen von Wolfgang Lübbe und Mona Hitznauer, Regensburg



Grafik: Wikipedia, gemeinfrei, Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler#](https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler#)

In diesem Beitrag lernen Ihre Schülerinnen und Schüler die Euler'sche Gerade kennen, die nach dem berühmten Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) benannt wurde. Sie beschreiben eine Gerade durch drei charakteristische Punkte eines Dreiecks: den Umkreismittelpunkt, den Schwerpunkt und den Höhenschnittpunkt. Genau so wie Euler wird Ihre Klasse erstaunliche Eigenschaften der Punkte und Geraden entdecken und Sie sowohl an konkreten Beispielen überprüfen als auch allgemein beweisen.

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie, 1. Aufl., II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder ins Internet gestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Kopien an Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. als ZMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden die Rechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Raabe Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-60  
meinRAABE@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Anna Maria W. Nebel  
Satz: Raabe Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe  
Bildnachweis Titel: Wikipedia, gemeinfrei, Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler#](https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler#)  
Illustration: Wolfgang Lübbe und Mona Hitzzenauer, Regensburg  
Lektorat: Mona Hitzzenauer, Regensburg  
Korrektur: Susanna Stotz, Wyhl a. K.

# Euler'sche Gerade

## Oberstufe (grundlegend, erhöht)

Wolfgang Lübbe, Rostock

Illustrationen von Wolfgang Lübbe und Mona Hitzenauer, Regensburg

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M 1 Aufgaben</b>	<b>2</b>
<b>Lösungen</b>	<b>4</b>

### Die Schüler lernen:

die Euler'sche Gerade kennen und was aus bereits gelerntes über Geraden im Raum in konkreten Aufgaben und in einer Beweisführung an. Sie mischen ihr Können in Konstruktionen von Dreiecken (mit ihren charakteristischen Punkten) und ihr Wissen über deren Eigenschaften auf.

VORANSICHT

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

**Ab** = Arbeitsblatt

Thema	Material	Method.
Aufgaben	M1	Ab

## Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Höhe im Dreieck, Geradengleichung, Mittelpunkt einer Strecke, senkrechte Gerade, Schnittpunkt zweier Geraden, Punktprobe, Streckenlänge, Teilungspunkt einer Strecke, Teilungsverhältnis, Konstruktion, Schwerpunkt im Dreieck, mathematische Beweisführung, ähnliche Dreiecke, lokale Extrema, Skalarprodukt;

**Medien:** GTR/GeoGebra

**Kompetenzen:** Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), Kommunizieren (K6)

## Hinweise zur Euler'schen Gerade

### Niveau

Die Aufgaben 1 und 3 eignen sich zum Einsatz im Grundkurs bzw. haben ein grundlegendes Niveau. Die Aufgabe 2 hingegen hat ein erhöhtes Niveau und findet sich daher im Leistungskurs an.



### Einsatz im Unterricht

Sie können die Aufgaben im Unterricht in Einzel- oder Kleingruppenarbeit lösen lassen. Wichtig ist zunächst, dass Ihre Schülerinnen und Schüler die Definition der Euler'schen Gerade verstehen und die darauf liegenden Punkte konstruieren können. Daher sollten die Lernenden die Aufgaben möglichst der Reihenfolge nach bearbeiten.

Wenn Sie Kleingruppen einteilen, achten Sie darauf, dass möglichst leistungsschwächere Schüler mit leistungsstärkeren zusammenarbeiten, damit alle Aufgaben von jeder Gruppe gelöst werden können.

Oder: Verteilen Sie die Aufgaben differenziert nach Leistungsvermögen der Gruppe oder der Einzelperson. Orientieren Sie sich dabei an den Differenzierungs-Icons neben den Aufgaben.

Falls dennoch schwerwiegendere Probleme beim Lösen der Aufgaben auftauchen sollten, können Sie Ihrer Klasse auch die Lösungen anbieten, da diese schrittweise und leicht verständlich gestaltet sind. Die Aufgabe 3b) können die Gruppenmitglieder auch mit einer dynamischen Geometrie-Software wie etwa GeoGebra bearbeiten, da es um eine räumliche Darstellung geht.

Besonders bei der Gruppenarbeit bietet es sich an, dass die Jugendlichen ihre Ergebnisse z. B. mithilfe einer Tafelanschrift präsentieren. Falls Aufgabe zwei nicht richtig gelöst wurde, können Sie entweder den Beweis frei, mithilfe der Lösung komplett oder nur die ersten Schritte (Voraussetzung, Behauptung und Beweisidee) vorgeben.

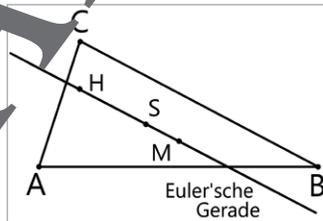
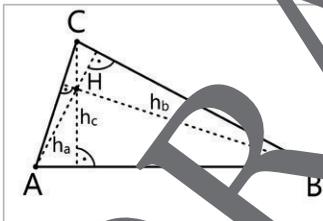
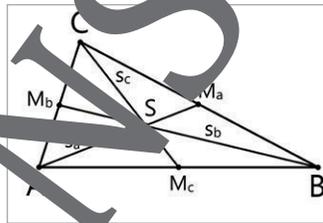
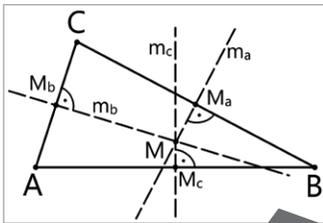
<sup>1</sup> Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

## M 1 Die Euler'sche Gerade

### Theorie

Zu den besonderen Linien in einem Dreieck  $ABC$  gehören die Mittelsenkrechten  $m_a, m_b, m_c$  der drei Seiten, die Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel sowie die Seitenhalbierenden  $s_a, s_b, s_c$  und die Höhen  $h_a, h_b, h_c$  der drei Seiten.

- Die Mittelsenkrechten schneiden einander in einem Punkt  $M$ , dem Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.
- Die Winkelhalbierenden schneiden einander in einem Punkt  $W$ , dem Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks.
- Die Seitenhalbierenden haben einen gemeinsamen Punkt  $S$  (Schwerpunkt des Dreiecks).
- Die Höhen treffen sich in einem Punkt  $H$ .



Alle Grafiken: Moni Witznauer

Die Punkte  $M$ ,  $S$  und  $H$  liegen auf einer Geraden. Diese Gerade heißt Euler'sche Gerade, nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783). Der Schnittpunkt  $W$  der Winkelhalbierenden spielt in diesem Beitrag keine Rolle.

Der Punkt  $S$  teilt die Strecke  $\overline{MH}$  im Verhältnis 1:2.

## M 1 Aufgaben



1. In der Ebene ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten  $A(-2|1)$ ,  $P(12|3)$  und  $C(4|5)$  gegeben.

a) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Euler'sche Gerade und bestätigen Sie durch Messung das Verhältnis, in dem der Punkt S die Strecke  $\overline{MH}$  teilt.

b) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Punkte M, S und H auf einer Geraden liegen. Berechnen Sie das in a) durch Messung festgestellte Verhältnis.



2. Beweisen Sie, dass in einem Dreieck die Punkte M, S und H auf einer Geraden liegen und der Punkt S die Strecke  $\overline{MH}$  im Verhältnis 1:2 teilt.

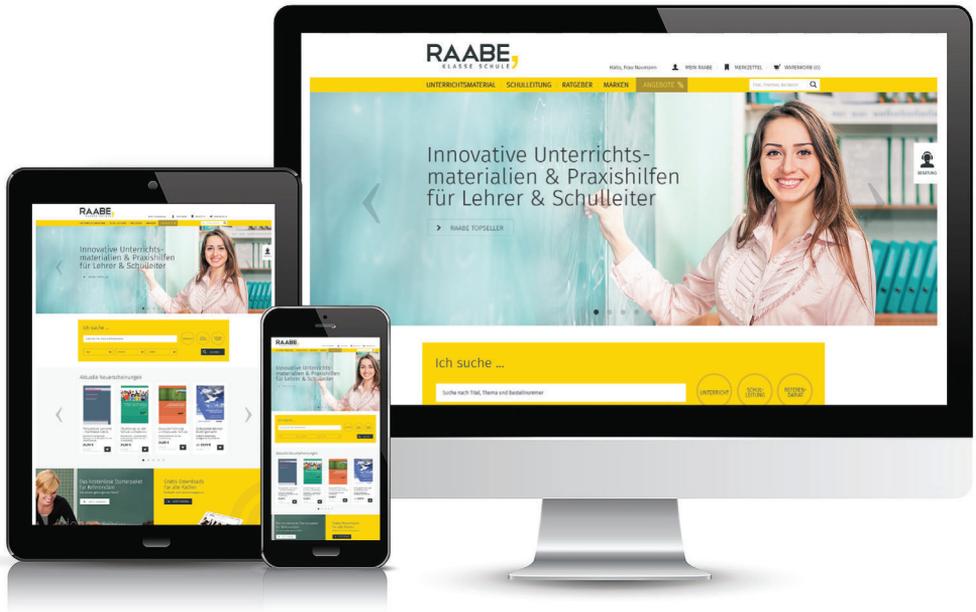


3. Im Raum ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten  $A(6|2|1)$ ,  $B(2|15|5)$  und  $C(4|6|10)$  gegeben.

a) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Punkte M, S und H auf einer Geraden liegen. Berechnen Sie das Verhältnis, in dem der Punkt S die Strecke  $\overline{MH}$  teilt.

b) Stellen Sie die in Aufgabenteil a) ermittelten Zusammenhänge in einem räumlichen Koordinatensystem dar (z. B. mit GeoGebra).

## Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



### Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über  
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch  
SSL-Verschlüsselung

**Mehr unter: [www.raabe.de](http://www.raabe.de)**