

Kuboktaeder

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau

Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau und Mona Hitznauer, Regensburg



Grafik: Dr. W. Zappe

Der Kuboktaeder ist vorstellungswise ein Würfel, dessen acht Ecken abgeschnitten wurden. Um diese Vorform aus einem Gesteinswürfel zu erhalten, kennzeichnet man die Mittelpunkte der Würfelkanten und schneidet die dadurch markierten acht Eckpyramiden ab. Die besondere Form des Körpers bietet Anlass zur Untersuchung einiger geometrischer Fragestellungen, die von der elementaren räumlichen Geometrie bis zur analytischen Vektorgeometrie des Raumes reichen. Mit diesem Beitrag schulen Sie insbesondere das räumliche Vorstellungsvermögen der Lernenden.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie, 1. Aufl., II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien nach § 60b Abs. 3 UrhG vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder ins Internet gestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Kopien an Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. als ZMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden die Rechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Raabe Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 6290-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Annette de Wittebel
Satz: Raabe Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen: Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau und Mona Hitzzenauer, Regensburg
Lektorat: Mona Hitzzenauer, Regensburg
Korrektur: Daniela Link, Mönchengladbach.

Kuboktaeder

Oberstufe (Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau

Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

Hinweise	1
M 1 Aufgaben	2
M 2 Lösungsabbildung zu Aufgabe 4 b	4
Lösungen	5

Die Schüler lernen:

den Begriff des Kuboktaeders kennen. Sie vertiefen ihre Kompetenzen in der räumlichen Anschauung und der Berechnung elementarer geometrischer Objekte wie Dreiecke, Quadrate, Pyramiden und Würfel. Mithilfe der vektoruellen analytischen Geometrie festigen sie ihre Kenntnisse über die gegenseitige Lage von Geraden und Winkelberechnungen zwischen einander schneidenden Ebenen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methoden
Aufgaben	M1	Ab
Abbildungen	M2	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Vektoren, elementare Flächen- und Volumenberechnungen in Abhängigkeit eines Parameters, Länge von Vektoren, Skalarprodukt, Geradengleichungen in Parameterform, Schnittpunkte und -winkel von Geraden, Schnittpunkte von Geraden und Koordinatenebenen

Medien: GTR/CAO, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise zum Kuboktaeder

„Das Kuboktaeder (auch Kubooktaeder oder Kubooktaeder) ist ein Polyeder (Vielflächner) mit 14 Seiten (6 Quadrate und 8 regelmäßige Dreiecke), 12 gleichartigen Ecken und 24 gleich langen Kanten. Aufgrund seiner Regelmäßigkeit zählt das Kuboktaeder zu den 13 archimedischen Körpern.“¹

Die Aufgabe 1 (**M 1**) könnte nach den Empfehlungen von Christof Weber² als mathematische Vorstellungsübung gestaltet werden. Danach wird der Unterricht folgendermaßen organisiert:



Quelle: Wikipedia

Die Phase des Vorstellens:

Bitten Sie Ihre Klasse, alle Gegenstände weglegen und sich auf das Kommende ruhig zu konzentrieren, eventuell sogar die Augen zu schließen. Fragen Sie den Text der Aufgabe 1 (**M 1**) ruhig und langsam mit. ³

Die Phase der Verschriftlichung:

Jedes Klassenmitglied sollte individuell Notizen und Skizzen anfertigen.

Die Phase der Besprechung und Reflexion:

Die Schülerinnen und Schüler³ tauschen ihre individuellen Vermutungen aus und stellen sie einander vor. Schließlich rücken Sie wieder mehr ins Zentrum und gehen auf die Vermutungen ein, besprechen und klären sie. Im Ergebnis der Aufgabe 1 sollten dann alle eine klare Vorstellung darüber haben, wie ein Kuboktaeder aussieht und wie dieser aus dem Würfel entsteht. Zur Vertiefung und Übung lösen die Jugendlichen die weiteren Aufgaben individuell oder arbeitsteilig.

¹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Kuboktaeder> (aufgerufen am 24.11.2020)

² Christof Weber: „Mathematische Vorstellungsübungen im Unterricht – Ein Handbuch für das Klassenraum“, Klett/ Kallmeyer, 2010

³ Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

M 1 Aufgaben

1. Führen Sie folgendes Gedankenexperiment durch:

Stellen Sie sich einen Würfel aus Knete oder Ton mit einer Handbreit Kantenlänge vor. Markieren Sie in Gedanken den Mittelpunkt jeder Kante.

Verbinden Sie gedanklich je zwei benachbarte Kantenmittelpunkte durch eine Strecke. Jeder Eckpunkt des Würfels hat genau drei benachbarte Kantenmittelpunkte.

Diese vier Punkte sind an jeder Würfelcke die Eckpunkte einer Pyramide.

Stellen Sie sich nun vor, dass jede dieser Pyramiden vom Würfel abgeschnitten wird. Beschreiben Sie mit Worten, wie Sie die Anzahl an Eckpunkten, Kanten und Seitenflächen, die sich nach der Entfernung der Eckpyramiden für das verbleibenden Restkörper ergeben, ermitteln.



Hinweis: Der auf diese Weise entstandene Restkörper hat den Namen „Kuboktaeder“.



2. Bestätigen Sie, dass für das Kuboktaeder gilt: Die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Flächen ist gleich zwei. (Euler'scher Polyedersatz)



3. Weisen Sie nach, dass die sechs vier-eckigen Seitenflächen des Kuboktaeders Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{2}{3}a$ sind, wenn a die Kantenlänge des erzeugenden Würfels ist.



4. Gegeben sind die Punkte

$$A(0|0|0),$$

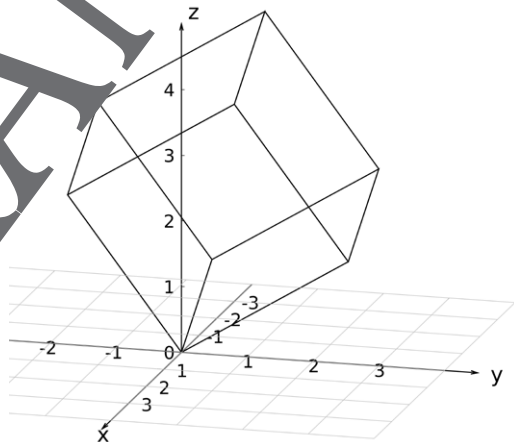
$$B(-1|-2|2),$$

$$D(2|1|-1) \text{ und}$$

$$E(-1|2|1).$$

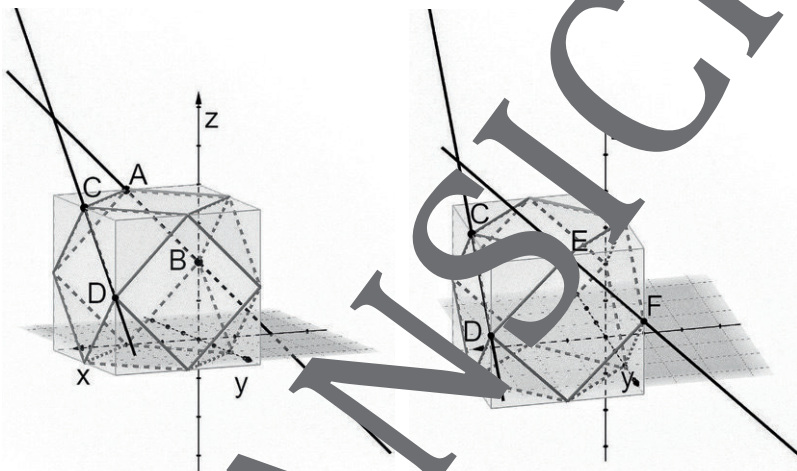
- a) Begründen Sie, dass die Vektoren \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{AE} einen Würfel aufspannen.

Zeichnen Sie in das abgebildete Schrägbild das aus dem Würfel konstruierbare Kuboktaeder ein.




Grafik: Mona Hitznauer

5. Aus einem Würfel der Kantenlänge a wird ein Kuboktaeder geschnitten. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Kuboktaeders in Abhängigkeit von a .
6. Aus einem Würfel, dessen eine Ecke im Ursprung liegt und dessen 4 cm langen Kanten achsenparallel verlaufen, wurde ein Kuboktaeder geschnitten. Durch jeweils zwei der Ecken des Kuboktaeders werden Geraden gelegt.



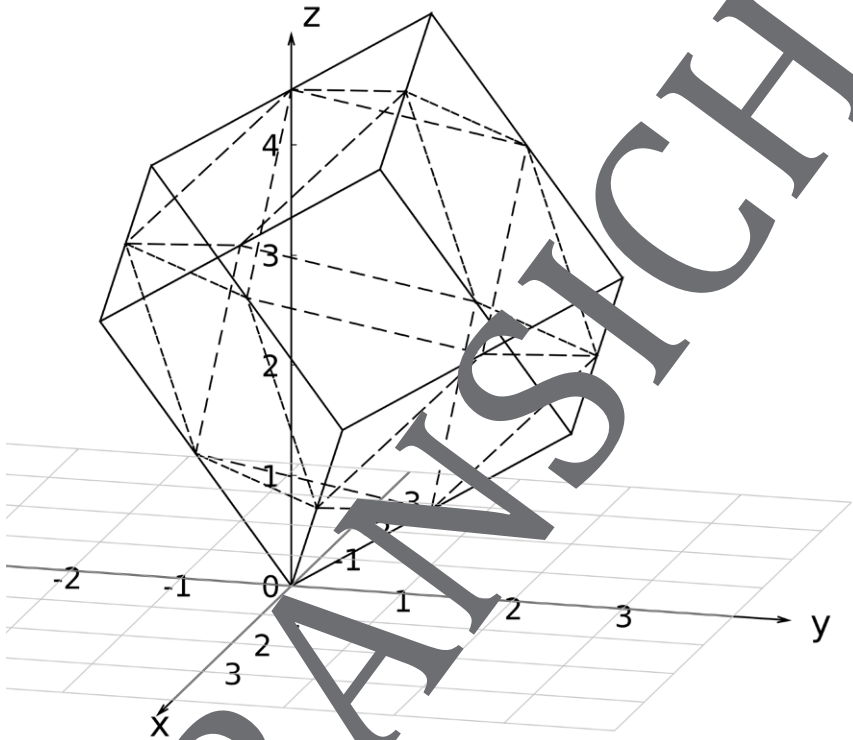
© RAABE 2021

Grafik: Dr. W. Z...

- a) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C, D, E und F des Kuboktaeders aus den beiden Abbildungen an.
- b)  Sie können dazu auch ein dynamisches Geometrieprogramm verwenden.
Zur Kontrolle: $A(2|0|4), C(4|2|4), E(2|4|4)$

- b) Untersuchen Sie, ob die Geraden $g(AB)$ und $h(CD)$ sowie $h(CD)$ und $k(EF)$ einander schneiden. Ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes und die Größe des Schnittwinkels beider Geraden.
- c) Ermitteln Sie die Koordinaten der Durchstoßpunkte der Geraden $h(CD)$ durch die Koordinatenebenen.

M 2 Lösungsabbildung zu Aufgabe 4 b



Grafik: Mona Hitzelberger

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de