Das Skalarprodukt berechnen, geometrisch interpretieren und nutzen

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

Foto: olaser/iStock/Getty Images Plus

Dieser Beitrag bietet Beispiele und Aufgaben (mit Lösungen) zum Thema „Skalarprodukt" an. Es geht darum, dass die Schülerinnen und Schüler das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnen, geometrisch interpretieren und bei Berechnungen sicher anwenden können. Mithilfe des Skalarprodukts ist es z. B. möglich, den Abstand eines Punktes von einer Geraden, den Schnittwinkel zweier Geraden oder den geringsten Abstand zweier windschiefer geradliniger Flugbahnen zu berechnen.

RAABE, KLASSE SCHULE

Das Skalarprodukt berechnen, geometrisch interpretieren und nutzen

Oberstufe (grundlegendes und erhöhtes Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

Hinweise

Das vorliegende Material kann die in Lehrbüchern vorhandenen inhaltlich-theoretischen Erläuterungen und Übungsaufgaben ergänzen. Zunächst gibt der Beitrag eine Übersicht über Definitionen, Eigenschaften und Interpretationen des Skalarprodukts. In einer [illegible] strukturierten Form folgen dann Arbeitsblätter zur Anwendung des Skalarprodukts in geometrischen Zusammenhängen.

In jeweils einem durchgerechneten Beispiel thematisiert der Beitrag typische Aufgabenstellungen, die in weiteren einschlägigen Aufgaben vertieft und gefestigt werden. Die Lösungen zu den Aufgaben sind ausführlich dargestellt, sodass die Lernenden auch weitgehend selbstständig mit den Materialien arbeiten können. Bei einigen schwierigeren und rechenaufwendigen Aufgaben sollte ein CAS-Rechner zum Einsatz kommen.

Dafür können die Jugendlichen die freie und kostenlose Software bzw. Smartphone-App GeoGebra als Hilfsmittel verwenden:

https://www.geogebra.org/cas

(zuletzt aufgerufen am 11. Januar 20[illegible])

Die Eingabe von Punkten erfolgt dort durch A = (1,2,3) oder B = (–2,5,0.5), der zugehörige Vektor $\overrightarrow{AB}$ wird mit dem Befehl V1=Vektor (A, B) generiert. Das Skalarprodukt ermittelt GeoGebra nach Eingabe des Befehls Skalarprodukt(<Vektor>,<Vektor>).

M 1 Grundlagen

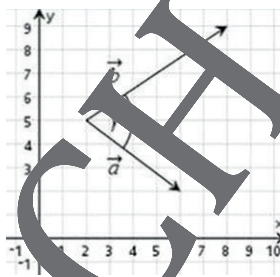
Das Skalarprodukt in der „Kosinusform“:

Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren, die einen Winkel γ einschließen ($0° \le \gamma \le 180°$).

Der Ausdruck

$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$

wird als Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet.



Grafik: Dr. W. Zappe

Das Skalarprodukt in der Koordinatenform:

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt:

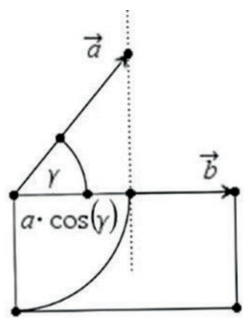
$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Analog gilt im zweidimensionalen Fall $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

Geometrische Interpretation des Skalarprodukts:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Produkt des Betrages eines dieser Vektoren mit der Projektion des anderen Vektors auf seine Richtung.

Wegen $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$ entspricht das Skalarprodukt der Maßzahl des Flächeninhaltes des von $|\vec{a}| \cdot \cos(\gamma)$ und $|\vec{b}|$ aufgespannten Rechtecks.



Grafik: Dr. W. Zappe

Eigenschaften des Skalarprodukts:

Das Skalarprodukt, obwohl aus zwei Vektoren gebildet, ist selbst kein Vektor, sondern eine Zahl, man sagt auch eine „skalare“ Größe.
Das Skalarprodukt ist kommutativ, es gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$.
Das Skalarprodukt ist distributiv, es gilt $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$.
Es gilt $k \cdot \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) = \left(k \cdot \vec{a}\right) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \left(k \cdot \vec{b}\right)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Der Betrag eines Vektors ergibt sich aus dem Skalarprodukt mit sich selbst mit $\gamma = 0°$ durch

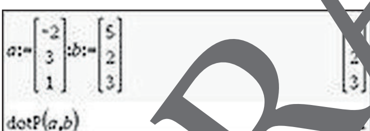
$$\vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos(0°) \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot 1 \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vom Nullvektor verschiedene Ve[illegible], so gi[illegible] für den Winkel γ, den diese Vektoren einschließen: $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$.

Zwei vom Nullvektor verschiedene [illegible] $\vec{b}$ sind genau dann orthogonal (senkrecht) zueinander, wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ gi[illegible].

Skalarprodukt mit CAS berechnen:



Grafik: Dr. W. Zappe

Aufgaben

Aufgabe	1	2	3
Niveau			

1. Berechnen Sie das Skalarprodukt der gegebenen Vektoren. Entscheiden Sie, ob die Vektoren orthogonal zueinander sind.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie – falls möglich – den Wert der Variablen x, sodass die beiden Vektoren das angegebene Skalarprodukt besitzen.

   a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix} = 7$

   b) $\begin{pmatrix} 5 \\ [illegible] \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

   c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 3x \end{pmatrix} = 7$

   d) $\begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2 \end{pmatrix} = [illegible]$

   e) $\begin{pmatrix} [illegible] \\ x \\ 3x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

   f) $\begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

3. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen:
   Hinz: „Für zwei reelle Zahlen a und b gilt stets $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$."
   Kunz: „Dann gilt auch für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ immer $\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 \circ \vec{b}^2$."

M 3 Skalarprodukt in Kosinusform berechnen

Beispiel

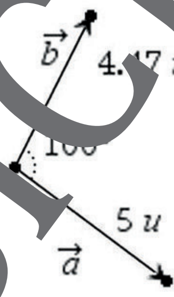
Gegeben sind zwei Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$.

Lösung:

Da die Längen der beiden Vektoren und der Winkel zwischen ihnen in der Abbildung gegeben sind, kann die Beziehung

$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$ verwendet werden:

$\vec{a} \circ \vec{b} = 4{,}47 \cdot 5 \cdot \cos(100°) \approx -3{,}88$.



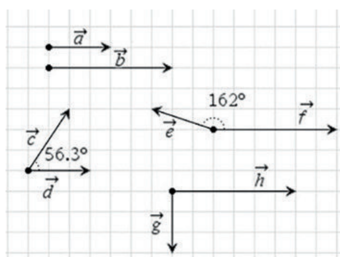
Grafik: Dr. W. Zappe

Aufgaben

Aufgabe	1	2
Niveau		

1. Berechnen Sie die Skalarprodukte
   $\vec{a} \circ \vec{b}$,
   $\vec{c} \circ \vec{d}$,
   $\vec{e} \circ \vec{f}$,
   $\vec{g} \circ \vec{h}$

   mithilfe der Beziehung $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$.



Grafik: Dr. W. Zappe

Hinweis: Ein Kästchen entspricht 1 LE. Bestimmen bzw. berechnen Sie damit die Längen der Vektoren, ohne zu messen.

2. Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $|\vec{b}| = 3$, die einen Winkel von 60° einschließen, gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = 3$. Berechnen Sie $|\vec{a}|$.

RAABE
KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!

Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de