Mathematik rund um Scherengitter

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe

Foto: Ziga Plahutar/E+/Getty Images Plus

Trockene Geometrie war gestern – mit diesem Beitrag treffen Sie den Nerv der jungen Generation und nutzen das volle Potenzial unserer digitalen Welt. Die Jugendlichen setzen hier z. B. ihr Smartphone ein, um Geometrieprobleme rund um das Scherengitter mit dynamischer Geometriesoftware zu lösen. Ein übersichtliches, einleitendes Beispiel gibt ihnen dazu das Wissen und die Werkzeuge an die Hand, sodass auch Lernschwächere nicht auf der Strecke bleiben. Ihre Klasse lernt den Umgang mit Geometriesoftware kennen, modelliert eigenständig und begreift durch Simulationen komplexere Bewegungen.

Mathematik rund um Scherengitter

Oberstufe

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe

Die Schüler lernen:

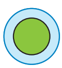
- an einem Alltagsgegenstand geometrische Eigenschaften der Raute und besonderer Punkte auf ihr kennen,
- ihr Können und Wissen über den Pythagoras, über Geradengleichungen, über vektorielle Beziehungen und Eigenschaften von Dreiecken anzuwenden,
- Parameterdarstellungen geometrischer Objekte aufzustellen,
- Ortskurven von Bahnpunkten aufzustellen und zu interpretieren,
- Kreisgleichungen und Ellipsengleichungen kennen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Bau eines Modells	M1	[illegible]
Simulation mit dynamischer Geometriesoftware	M2	Ab
Untersuchung von Scherengittern	M3	Ab
Aufgaben	M4	Ab
Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	M5	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Kompetenzprofil:

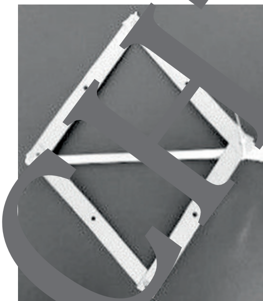
Inhalt: Sachverhalte mit Vektoren oder Gleichungen beschreiben, Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

M 1 Bau eines Modells

Basteln Sie aus Pappstreifen, Musterbeutelklammern, Kabelbindern und einem Holzlöffel ein einfaches Modell eines Scherenwagenhebers. Beschreiben Sie anhand dieses Modells die prinzipielle Funktionsweise des Wagenhebers. Gehen Sie auch auf Unterschiede zwischen diesem Modell und dem realen Wagenheber ein.



Grafik: Dr. W. Zappe

Material, Werkzeuge und Herstellung

Sie benötigen: stabile Pappe, Schere, Lochzange oder Locher, einen Holzstab (Quirl, Holzlöffel o. Ä.), zwei Musterbeutelklammern, zwei kleine Kabelbinder.

Aus der Pappe schneiden Sie vier gleich lange und gleich breite Streifen. Diese lochen Sie am unteren und am oberen Ende. Verbinden Sie anschließend jeweils zwei Streifen mithilfe einer Musterbeutelklammer, sodass sie sich noch gegeneinander bewegen lassen. Die noch freien Enden der Pappstreifen befestigen Sie mithilfe der Kabelbinder am Holzstab, und zwar so, dass sich der Holzstab gerade noch hindurchschieben lässt (vgl. Abbildung).

Verwendung und Beobachtung

Foto: Ziga Plahutar /E+/Getty Images Plus

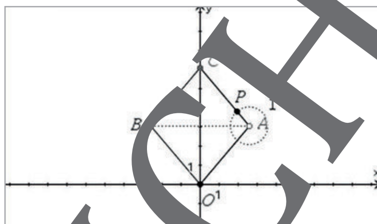
Hält man im Modell den unteren Eckpunkt fest und bewegt den oberen Punkt senkrecht nach oben oder unten, so wird eine Höhenveränderung erreicht. Dabei verändert sich sowohl der Abstand zwischen linkem und rechtem Eckpunkt als auch die Höhe dieser beiden Punkte über dem unteren Eckpunkt. Die senkrechte Achse bleibt dabei ortsfest. Das Viereck hat bis auf die Grenzlagen die Form einer Raute. In den Grenzlagen, also wenn oberer und unterer bzw. linker und rechter Eckpunkt zusammenfallen, ergibt sich jeweils eine Strecke, die doppelt so lang ist wie eine Seite der Raute. Beim realen Wagenheber werden durch die Drehbewegung des waagerechten Verbindungsstabes der linke und der rechte Punkt gleichzeitig nach innen bzw. nach außen mit gleichem Abstand zur senkrechten Achse bewegt.

M 3 Untersuchung von Scherengittern

Beispiel Scherenwagenheber

Verwenden Sie eine der Konstruktionen der Seiten 3 oder 4.

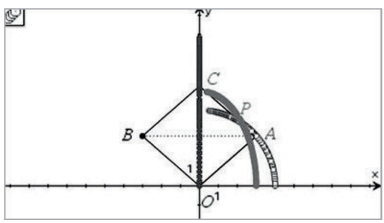
Es sei P ein Punkt auf der Seite $\overline{AC}$, sodass $\left|\overline{AP}\right| = \frac{1}{4} \cdot \left|\overline{AC}\right|$. Zu seiner Konstruktion wird um A ein Kreis mit Radius 1 LE gelegt **(Geometry–Konstruktion–Zirkel)** und mit der Strecke $\overline{AC}$ zum Schnitt gebracht **(Geometry–Punkte & Geraden–Schnittpunkt)**. Mithilfe der geometrischen Simulation des Scherenwagenhebers wird zuerst auf anschaulicher Ebene der Frage nachgegangen, auf welchen Bahnen sich die Punkte A, C und P bewegen, wenn die Lage von A im I. Quadranten verändert wird.



Vermutungen:

– Punkt A bewegt sich auf einem Kreis um den Ursprung O mit dem Radius r = 4 LE, denn Punkt O und die Länge der Strecke $\overline{OA}$ sind nach Konstruktion fix.
– Punkt C bewegt sich auf einer Strecke zwischen den Endpunkten O(0|0) und E(8|0), denn C liegt als Spiegelpunkt von O immer auf der y–Achse und kann höchstens das Doppelte der Länge von $\overline{OA}$ vom Punkt O entfernt sein.
– Für den Punkt P(x|y) darf man vermuten, dass sein y-Wert zwischen 1 und 5 und sein x-Wert zwischen 0 und 3 liegt.

Mithilfe der Geometriespur **(Geometry–Spur–Geometriespur)** lassen sich diese Überlegungen zunächst anschaulich verifizieren, siehe Abbildung rechts.



Grafiken: Dr. W. Zappe

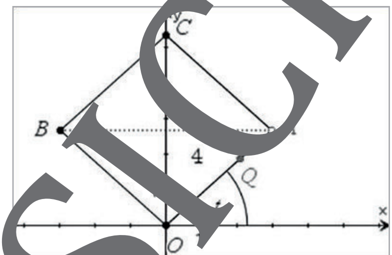
Mit **GeoGebra** kann die Konstruktion in ähnlicher Weise erfolgen:

Punkt P mit „**Kreis mit Mittelpunkt und Radius**" und anschließend dem Werkzeug „**Schneide**" konstruieren.

M 4 Aufgaben

Aufgaben-Nr.	1, 2	3, 5, 6, 7	4, 8
Niveau	● (Kreis)	■ (Quadrat)	▲ (Dreieck)

1. Betrachten Sie einen beliebigen, festgewählten Punkt Q $(Q \neq O)$ der Strecke $\overline{OA}$ im Simulationsmodell von **M 2**. Begründen Sie, dass die Bahnkurve von Q bei Veränderung der Größe des Winkels t mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ auf einem Viertelkreis mit dem Radius $r = \overline{OQ}$ liegt.



Grafik: Dr. W. Zappe

   Geben Sie eine vektorielle Gleichung dieses Viertelkreises in Parameterform an.
   Zeigen Sie, dass $x^2 + y^2 = (k \cdot 4)^2$ eine parameterfreie Form dieser Kreisgleichung ist.

2. Es sei R der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ im Simulationsmodell von **M 2**.
   Konstruieren Sie eine Geometriespur von R in Abhängigkeit von t mit $t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, wenn dieser den Winkel zwischen $\overline{OA}$ und der x-Achse beschreibt.
   Ermitteln Sie eine vektorielle Gleichung für $\overrightarrow{OR}$ in Parameterform.
   Begründen Sie, dass die Ellipse, auf der die Spurpunkte von R liegen, sich auch durch die Gleichung $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ angeben lässt.

3. Es sei P ein Punkt auf der Seite $\overline{AC}$ im Simulationsmodell von **M 2**, der diese Seite von A aus gesehen im Verhältnis 1 : 2 teilt.
   a) Leiten Sie eine vektorielle Parametergleichung für den Ortsvektor von P in Abhängigkeit von t her, wenn der Parameter t mit $t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ den Winkel zwischen $\overline{OA}$ und x-Achse angibt.
   b) Berechnen Sie, für welchen Winkel t der Punkt C eine Höhe von 5 LE über der x- Achse erreicht.
   c) Ermitteln Sie, wie hoch der Punkt C über der x–Achse steht, wenn t = 50° ist.
   d) Untersuchen Sie, ob es Winkel t gibt, für die der Umfang bzw. der Flächeninhalt der Raute OACB lokale Extrema besitzen.