

# Abiturvorbereitung Analytische Geometrie – Körper und Flächen

Alfred Müller

Illustrationen von Mona Hitzeneauer



© Hill Street Studios / DigitalVision / Getty Images Plus

Mit diesem Beitrag testen die Jugendlichen ihre Fähigkeiten im Bereich Analytische Geometrie und prüfen, ob sie bereit sind für das schriftliche Abitur sind. Sechs Testklausuren mit Bearbeitungszeitangabe dienen Ihnen als Lernerfolgskontrolle oder den Schülerinnen und Schülern als Selbsttest.

# Abiturvorbereitung Analytische Geometrie – Körper und Flächen

Alfred Müller

Illustrationen von Mona Hitzenauer

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M 1–M 6 Aufgaben</b>	<b>3</b>
<b>Lösungen</b>	<b>8</b>

## Die Schüler lernen:

ihre Fähigkeiten im Bereich analytische Geometrie an abiturrelevanten Aufgaben einzusetzen und zu prüfen. Durch verschiedene Lösungswege erkennen Sie, dass es oft eine vorteilhaftere, effektive bzw. rechenarme Möglichkeit gibt.

VORANSICHT

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt LEK Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methoden
Aufgaben	M1–M6	Ab, LEK

## Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Geraden und Ebenengleichungen in Parameterform, Normalenform und Hesse'scher Normalenform, Lagebeziehungen, Schnittpunkte und -geraden, Schnittwinkel, Kugelgleichung, Volumen und Oberfläche von einfachen und zusammengesetzten Körpern

**Medien:** GeoGebra, CAS, GeoGebra

**Kompetenzen:** Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen

Ihre Klasse bzw. ihr Kurs sollte bereits mit den meisten der abiturelevanten Themen der Analytischen Geometrie vertraut sein.

### Lehrplanbezug

Die Aufgaben des Beitrags fördern z. B. folgende Kompetenzen des Lehrplans für die gymnasiale Oberstufe in Bayern:

Die Schülerinnen und Schüler...

- stellen die Gleichungen von Geraden und Ebenen in Normalenform auf.
- stellen die Gleichungen von Ebenen in Normalenform auf und ziehen evtl. aus der Ebenengleichung Rückschlüsse auf die Lage der Ebene im Koordinatensystem.
- ermitteln systematisch und begründet die gegenseitige Lage von Geraden, von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen zueinander und berechnen ggf. Schnittpunkte bzw. Schnittgeraden sowie die Größe von Schnittwinkeln.
- bestimmen den Abstand zweier Punkte, eines Punktes von einer Geraden oder einer Ebene, zweier Geraden oder zweier Ebenen sowie einer Geraden von einer Ebene, ggf. auch unter Verwendung der Hesseschen Normalenform.

### Einsatz im Unterricht

Die Materialien (M 1-M 6) sind einzeln als Lernerfolgskontrollen bzw. Selbsttests gedacht. Die Jugendlichen sollten daher die Aufgaben möglichst allein und eigenständig lösen, damit die Tests aussagekräftig sind.

### Differenzierung

Je nach Leistungsstärke sollten sich die Schülerinnen und Schüler die Materialien vornehmen. Wird ein Material bzw. Test mit einfachem Niveau bestanden (etwa Note 4, siehe Tabelle in den Lösungen) kann ein mittelschwerer Test und schließlich der Test mit schwierigem Niveau bearbeitet werden.

Material	M 1	M 2	M 3	M 4	M 5	M 6
Niveau						

## M 1 Quadrat im Raum

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind der Punkt  $C(2|18|-7)$  sowie die

Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}$  mit dem Antragspunkt  $A(2|1|-4|2)$  gegeben.

Die Punkte A und C gehören zu einem Quadrat ABCD, dessen Punkt B auf der Geraden g liegt. Fertigen Sie im Folgenden eine Skizze an.

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B als Fußpunkt des Lotes von C auf g. Welche Länge besitzt dieses Lot? **[8 BE]**
  - Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D, den Radius  $r_0$  des Umkreises, den Radius  $\rho$  des Inkreises des Quadrats ABCD sowie dessen Flächeninhalt  $A_0$ . **[6BE]**
2. Das Quadrat ABCD liegt in der Ebene  $E: x_1 - 2 = 0$  (Nachweis nicht erforderlich). Vom Punkt  $S(6|2|0)$  wird das Lot auf die Ebene E gefällt.
- Zeigen Sie, dass der Lotfußpunkt L der Mittelpunkt des Quadrats ist. Wie groß ist die Höhe  $h = |\overline{SL}|$ ? **[3 BE]**
  - Bestimmen Sie dann das Volumen  $V_1$  des Kegels mit der Spitze S, dessen Grundfläche der Umkreis des Quadrats ist, das Volumen  $V_2$  der Pyramide ABCDS sowie das Volumen  $V_3$  des Kegels mit der Spitze S, dessen Grundfläche der Inkreis des Quadrats ist. In welchem Verhältnis stehen die drei Volumina? **[6 BE]**
3. Die Ebene F verläuft durch den Punkt  $P(2|0|1|-4)$  sowie durch die Punkte D und S von Aufgabe 1.
- Bestimmen Sie eine Gleichung von F in Normalenform. Welche besondere Lage hat die Ebene F im Koordinatensystem? **[4 BE]**
  - In welchem Punkt P' und unter welchem Winkel  $\varphi$  schneidet die Gerade g die Ebene F? Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F sowie den spitzen Winkel  $\varepsilon$ , unter dem sich die beiden Ebenen E und F schneiden. **[8 BE]**
  - Eine Kugel K mit dem Mittelpunkt A hat die Ebene F als Tangentialebene. Bestimmen Sie eine Gleichung der Kugel K. **[5 BE]**

**Arbeitszeit:** 55 Minuten

**Gesamt:** [40 BE]

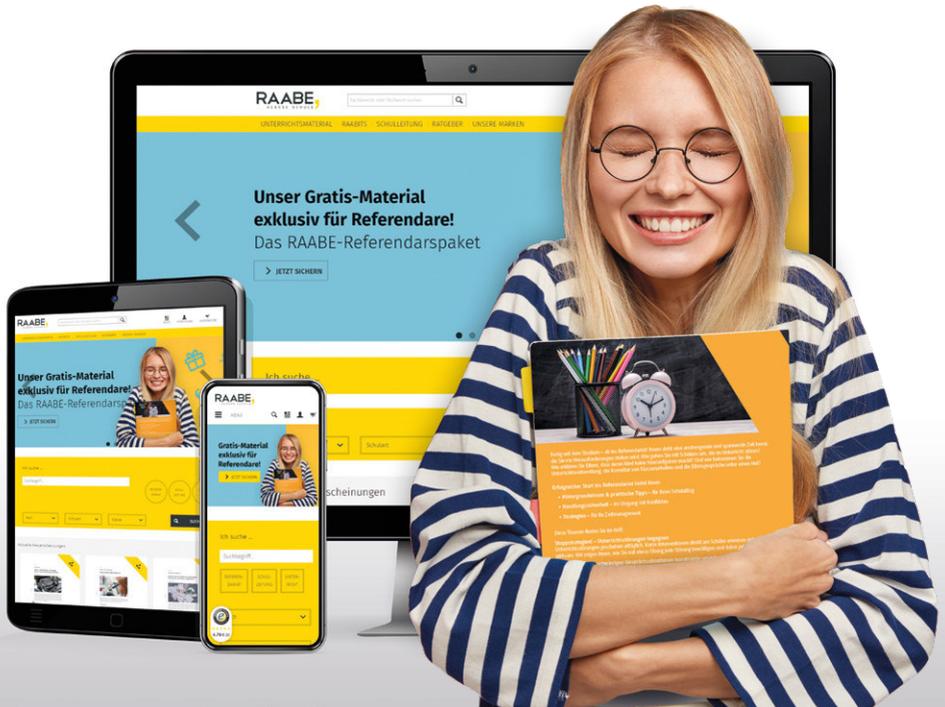
## M 2 Quader mit Pyramide

1. Die zu betrachtende Figur besteht aus einem Quader  $ABCDEFGH$  und einer aufgesetzten Pyramide  $EFGHS$ . Bekannt sind die Punkte  $A(3| -4| 0)$ ,  $G(-3| 4| 2)$  und  $S(0| 0| 9)$ . Ferner ist der Punkt  $P(-3| 4| 10)$  gegeben.
  - a) Bestimmen Sie die Koordinaten der noch fehlenden Punkte. Zeichnen Sie die Figur in ein räumliches Koordinatensystem und bestimmen Sie die Länge der Seitenkante  $[GS]$  sowie eine Gleichung der Geraden  $g = \overleftrightarrow{AS}$ . **[6 BE]**
  - b) Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des Gesamtkörpers. Welche Innenwinkel haben die Seitenflächen der Pyramide an der Spitze? **[7 BE]**
  - c) Die Punkte  $A$  und  $P$  legen eine Gerade  $h$  fest. In welchem Punkt  $Q$  durchstößt diese Gerade die Grundfläche der Pyramide? **[4 BE]**
  - d) Die Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich in einem Punkt  $R$  unter einem Winkel  $\varphi$ . Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $R$  sowie die Maßzahl des Winkels  $\varphi$ . **[5 BE]**
  - e) Die Gerade  $k$  ist parallel zur Geraden  $h$  und geht durch die Pyramidenspitze  $S$ . Welchen Abstand besitzen die beiden Geraden  $k$  und  $h$ ? **[6 BE]**
  - f) Verlängert man die Seitenkanten  $[ES]$ ,  $[FS]$ ,  $[GS]$  bis zu ihren Schnittpunkten  $E'$ ,  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$  mit der  $xy$ -Ebene, so entsteht eine Pyramide  $E'F'G'H'S$ . Berechnen Sie dessen Volumen. **[6 BE]**
  - g) Die Ebene  $E_1$  durch die Punkte  $A$ ,  $G$  und  $P$  schneidet die Seitenflächenebene  $E_2$  durch die Punkte  $F$ ,  $G$  und  $S$  in einer Geraden  $l$  unter einem Winkel  $\varepsilon$ . Bestimmen Sie eine Gleichung von  $l$  sowie die Größe des Winkels  $\varepsilon$ . **[6 BE]**

**Arbeitszeit:** 45 Minuten

**Gesamt:** [40 BE]

# Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



- ✓ **Über 4.000 Unterrichtseinheiten** sofort zum Download verfügbar
- ✓ **Sichere Zahlung** per Rechnung, PayPal & Kreditkarte
- ✓ **Exklusive Vorteile für Grundwerks-Abonent\*innen**
  - 20% Rabatt auf Unterrichtsmaterial für Ihr bereits abonniertes Fach
  - 10% Rabatt auf weitere Grundwerke

Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**