Matrizen – geometrische Optik

von Axel Donges

© *Wavebreak Media/Thinkstock*

Die Matrizenrechnung ist ein sehr mächtiges und deshalb oft angewandtes Instrument der Mathematik. Komplexe mathematische Probleme lassen sich mit ihr übersichtlich lösen. Daher ist sie seit einigen Jahren – zumindest in den größeren Bundesländern – auch wieder Gegenstand der Abiturprüfung. In diesem Beitrag zeigen wir, wie sich die paraxiale Ausbreitung eines Lichtstrahls durch ein optisches System mithilfe der Matrizenrechnung übersichtlich beschreiben lässt. Man nennt das hier vorgestellte Verfahren Matrizenoptik. Es wird in der technischen Optik vielfach angewendet.

Matrizen – geometrische Optik

Oberstufe (grundlegend)

von Axel Donges

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Matrizenrechnung in realen Anwendungsfällen kennen und wenden ihr bestehendes und neu erworbenes Wissen und Können in zahlreichen Aufgaben an. Die Jugendlichen erkennen den engen Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik auch im Teilbereich der Optik.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB	Arbeitsblatt	**TH**	Theorie	**TA**	Tafelanschrift
FS	Formelsammlung	**MB**	Merkblatt	**LEK**	Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Was ist eine Matrix? – Kurz und bündig	M1	TH, TA
Rechnen mit Matrizen – was man wissen sollte	M2	TA, FS
Rechnen mit Matrizen – Übungsaufgaben	M3	AB
Optische Grundlagen – kurz und bündig	M4	TH
Strahlvektor und Transfermatrix	M5	TH
Transfermatrix der geradlinigen Ausbreitung	M6	TH, AB
Transfermatrix der Brechung an ebener Grenzschicht	M7	TH, AB
Transfermatrix der dünnen Linse	M8	TH
Transfermatrix eines optischen Systems	M9	TH
Transfermatrix eines optischen Systems – Übungen	M10	AB
Transfermatrix zweier dünner Linsen ohne Abstand	M11	TH, AB
Transfermatrix des astronomischen Fernrohrs	M12	TH, AB
Transfermatrix der optischen Abbildung durch eine Linse	M13	TH
Zusammenfassung Matrizenoptik – kurz und bündig	M14	MB
Sind Sie fit? – Lernerfolgskontrolle zur Matrizenoptik	M15	LEK

Kompetenzprofil:

Inhalt: Matrizenrechnung, Matrizenoptik, Lichtbrechung, Eingangs- und Ausgangsstrahl, Abstand und Winkel zur optischen Achse

Medien: TR, CAS

Kompetenzen: mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Didaktisch-methodische Hinweise

Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Materialien ist es, Ihre Schülerinnen und Schüler mit den Grundlagen der Matrizenrechnung und der geometrischen Optik vertraut zu machen, damit sie kleinere optische Systeme mit der **Matrizenoptik-Methode** beschreiben und berechnen können.

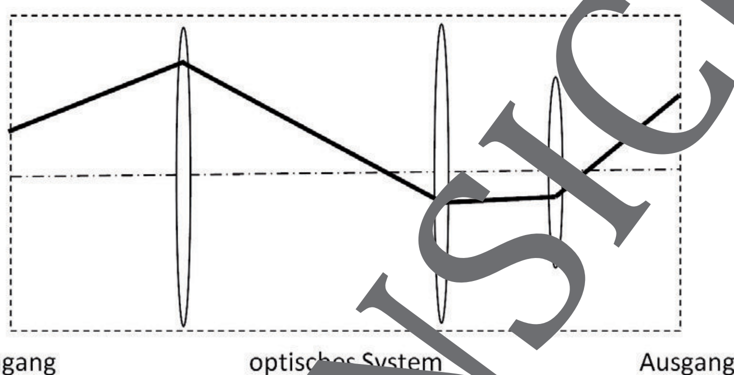

Abb. 1: Strahlengang durch ein optisches System (z. B. Mikroskop)

Optisches System als Black Box

Ein geometrisch-optisches System besteht i. d. R. aus einer größeren Anzahl von Teilsystemen (siehe Abb. 1). So kann beispielsweise das **Objektiv einer Kamera** aus mehreren Linsen, die in definierten Abständen angeordnet sind, bestehen (siehe Abb. 2).

Sind alle Parameter des Objektivs bekannt, lassen sich die Eigenschaften des austretenden Lichtstrahls (Abstand zur optischen Achse, Austrittswinkel) berechnen, sofern die Eigenschaften des eintretenden Lichtstrahls (Abstand zur optischen Achse, Eintrittswinkel) bekannt sind (siehe Abb. 3).

Die Eigenschaften des Lichtstrahls (Abstand und Winkel zur optischen Achse) lassen sich zu einem in Material **M 5** genauer definierten **Strahlvektor** $\vec{r}$ zusammenfassen.

Zwischen den Strahlvektoren $\vec{r}_{\text{Eingang}}$ und $\vec{r}_{\text{Ausgang}}$ am Ein- und Ausgang des optischen Systems besteht ein **linearer Zusammenhang**, der mathematisch mithilfe einer **Matrix** beschrieben werden kann: $\vec{r}_{\text{Ausgang}} = M\,\vec{r}_{\text{Eingang}}$.

M 3 Rechnen mit Matrizen – Übungsaufgaben

1. Addieren und subtrahieren Sie die folgenden Matrizen:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 37 & 102 & 67 & 33 \\ 30 & 88 & 60 & 38 \\ 31 & 97 & 39 & 15 \\ 55 & 132 & 101 & 76 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 = \begin{pmatrix} 30 & 109 & 80 & 30 \\ 23 & 98 & 50 & 34 \\ 32 & 98 & 49 & 12 \\ 56 & 135 & 101 & 71 \end{pmatrix}$$

   Interpretieren Sie die Ergebnisse, wenn die Matrizen die Quartalsverkaufszahlen der Jahre 2016 (M_1) und 2017 (M_2) bedeuten (vgl. Beispiel 1, Material **M 1**).

2. Multiplizieren Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 37 & 102 & 67 & 33 \\ 30 & 88 & 60 & 38 \\ 31 & 97 & 39 & 15 \\ 55 & 132 & 101 & 76 \end{pmatrix} \text{ mit 2.}$$

   Interpretieren Sie das Ergebnis, wenn die Matrix M die gleiche Bedeutung wie in Beispiel 1 (**M 1**) hat.

3. Gegeben sind die Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 = \begin{pmatrix} 8 & [illegible] \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie die Matrizen $M_1 \cdot M_2$ und $M_2 \cdot M_1$.

4. Gegeben ist die Matrix M und der Spaltenvektor $\vec{v}$.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   Wenden Sie die Matrix M auf den Spaltenvektor $\vec{v}$ an. Kann man den Vektor auch von **links** an die Matrix „dranmultiplizieren“: $\vec{v} \cdot M$?

5. Lösen Sie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. Welche Bedingung muss ein Vektor erfüllen, damit Sie die Matrix M auf diesen Vektor anwenden können?

$$M = \begin{pmatrix} 37 & 102 & 67 & 33 \\ 30 & 88 & 60 & 38 \\ 31 & 97 & 39 & 15 \end{pmatrix}$$

M 4 Optische Grundlagen – kurz und bündig

Um optische Systeme mithilfe von Matrizen berechnen zu können, sind Grundkenntnisse der geometrischen Optik erforderlich. Das erforderliche Wissen ist in diesem Material kurz zusammengefasst:

- Geradlinige Ausbreitung von Lichtstrahlen: Ein Lichtstrahl breitet sich in einem homogenen Medium **geradlinig** aus.
- Lichtbrechung an einer ebenen Grenzfläche: Fällt Licht auf die Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen, homogenen Medien mit den Brechzahlen n_1 und n_2, so findet eine **Brechung** statt. In anderen Worten: Der Lichtstrahl ändert seine Richtung. Es gilt das **Snellius'sche[1] Brechungsgesetz** (siehe Abb. 1):

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 \tag{7}$$

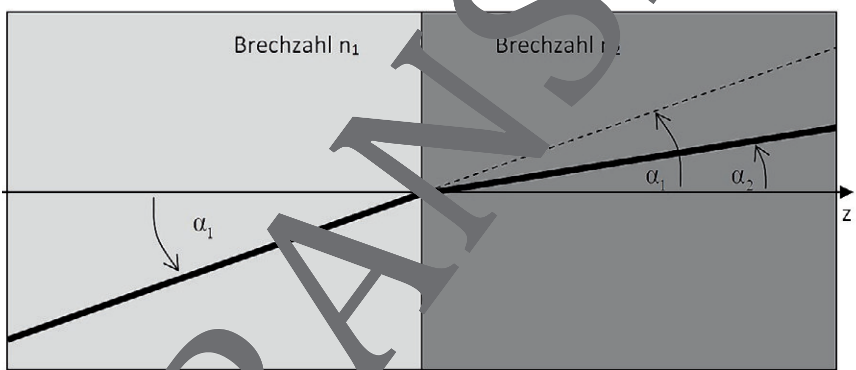

Abb. 1: Die Brechung von Licht

[1] Willebrord van Roijen Snell (1580–1626) war ein niederländischer Astronom und Mathematiker.

M 5 Strahlvektor und Transfermatrix

Jedes optische System hat einen Eingang und einen Ausgang. An jeder Stelle z des Strahlengangs wird der Lichtstrahl durch die Angabe zweier Parameter eindeutig definiert (siehe Abb. 1 unten):

- Abstand d von der optischen Achse
- Winkel α (im Bogenmaß) gegen Parallele zur optischen Achse

Negative Werte von d bzw. α bedeuten, dass der Lichtstrahl unterhalb der z-Achse verläuft bzw. die Steigung des Lichtstrahls negativ ist. Die beiden Parameter d und α werden zu dem sog. **Strahlvektor**

$$\vec{r}(z) = \begin{pmatrix} d(z) \\ \alpha(z) \end{pmatrix} \qquad (8)$$

zusammengefasst. Im allgemeinen Fall verändert sich der Strahlvektor mit der Ausbreitungsrichtung z.

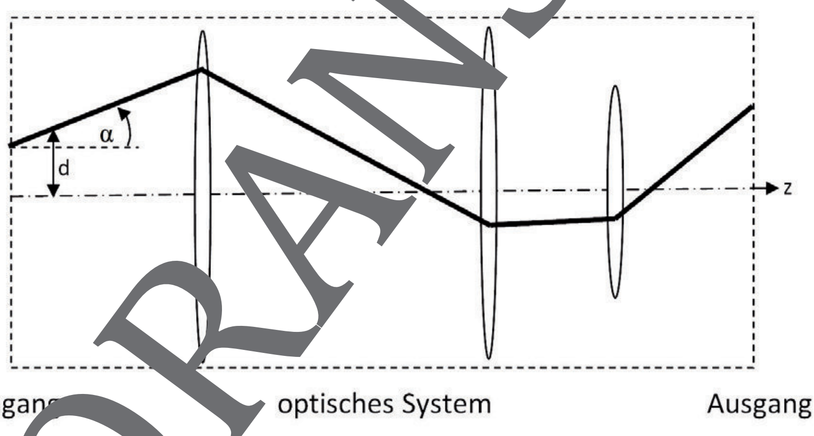

Abb. 1: An jeder Stelle z des Strahlengangs hat der Lichtstrahl einen definierten Abstand d(z) von der optischen Achse und einen definierten Winkel $\alpha(z)$ gegen die Parallele zur optischen Achse.

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download **im RAABE Webshop.**

Über 4.000 Unterrichtseinheiten sofort zum Download verfügbar

Sichere Zahlung per Rechnung, PayPal & Kreditkarte

Exklusive Vorteile für Grundwerks-Abonnent*innen

- 20 % Rabatt auf Unterrichtsmaterial für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10 % Rabatt auf weitere Grundwerke

Jetzt entdecken:

www.raabe.de