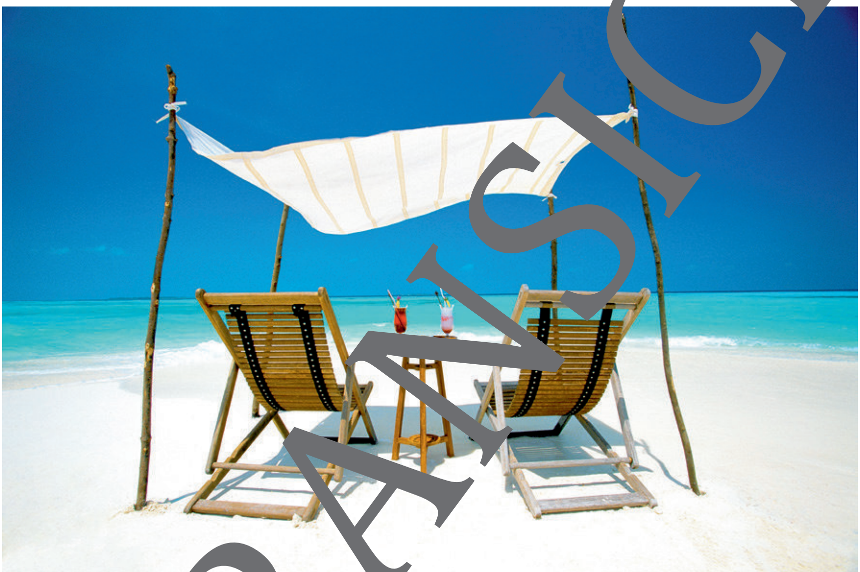
Vermischte Übungen: Sonnensegel am Strand geometrisch betrachtet und andere Aufgaben

Ein Beitrag von Alfred Müller



© Sakis Papadopoulos/robertharding / Collection Mix: Subjects

Diese Aufgabensammlung beschäftigt sich intensiv mit Geraden und Ebenen und der Lage, die sie zueinander einnehmen können, aber auch mit Kugeln und Pyramiden. In einer Vielzahl von Aufgaben wiederholen und festigen die Lernenden den Stoff und schulen dabei ihr räumliches Vorstellungsvermögen. Insbesondere eine Übungsaufgabe, in der ein Sonnensegel am Strand modelliert wird, bietet ein anschauliches Beispiel für die praktische Anwendung des Gelernten.
Eine Lernerfolgskontrolle bietet die Möglichkeit, die Aufgaben in Form von Übungstests zur Überprüfung der Kenntnisse zu verwenden.

RAABE, KLASSE SCHULE

Vermischte Übungen: Sonnensegel am Strand geometrisch betrachtet und andere Aufgaben

Ein Beitrag von Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

In einer Vielzahl von Aufgaben wiederholen die Schüler den Stoff aus dem Bereich der Analytischen Geometrie. Es werden Ebenen und Geraden untersucht sowie Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittwinkel bestimmt. Auch Pyramiden und Kugeln werden mit den Werkzeugen der analytischen Geometrie näher untersucht.
Die Aufgabe „Ein Sonnensegel am Strand“ bietet den Jugendlichen die Möglichkeit, das Gelernte im Rahmen eines anschaulichen Beispiels einzusetzen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Geraden	M1-M6	AB
Ebenen	M1-M6	AB
Pyramide	M1, M3	AB
Schnittpunkt	M1-[illegible]	AB
Volumen	M1, M2, [illegible]	AB
Oberfläche/Flächeninhalt	M1, [illegible] M3	AB
Projektion/Schattenwurf	M2	AB
Mathematisch modellieren	M2	AB
Schnittgerade	[illegible], M4, M5	AB
Kugel	M6	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Koordinaten, Punkte, Gerade, Ebene, Parameterform, Normalenform, Schnittpunkt, Schnittwinkel, Lagebeziehung, Projektion, Dreieck, Pyramide, Kugel, Fläche, Volumen

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Pyramide und Geradenschar M1

1. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O und der Standardbasis B_0 sind die Punkte $A(5|4|-2), B(1|8|-4)$ und $C(1|2|2)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck bilden und berechnen Sie dessen Flächeninhalt. Bestimmen Sie dann eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B, C in Normalenform. **[8 BE]**
   b) Der Punkt $S(3|9|3)$ ist die Spitze einer dreiseitigen Pyramide ABCS. Legen Sie eine Skizze der Pyramide als Schrägbild an und bestimmen Sie das Volumen der Pyramide sowie den Inhalt der Seitenfläche BCS. **[5 BE]**
   c) Der Punkt S´ ist die senkrechte Projektion des Punktes S auf die Ebene E. Bestimmen Sie die Koordinaten von S´ und zeigen Sie, dass S´ der Mittelpunkt der Strecke $[BC]$ ist. Bestimmen Sie dann die Koordinaten eines Punktes D, der das Dreieck zum Quadrat ABDC ergänzt und begründen Sie, dass die Pyramide ABDCS eine gerade Pyramide ist. **[5 BE]**

2. Gegeben ist eine Schar von Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}$, $a, \rho \in \mathbb{R}$.
   a) Welche besondere Lage besitzen alle Geraden g_a der Schar? Untersuchen Sie, ob es eine Gerade aus der Schar gibt, die parallel zur Ebene E ist. **[3 BE]**
   b) Für $\rho = 1$ liegt der Punkt $P_a(3|1+a|\text{[illegible]})$ auf der Schar g_a. Für welchen Wert von a ist der Abstand des Punktes A vom Punkt P_a minimal? **[4 BE]**
   c) Nun sei a = 4. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes T sowie des Schnittwinkels φ der Geraden g_4 mit der Ebene E. **[4 BE]**

3. Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = k_1 \cdot \overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{AC} = k_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$ zeigen in Richtung der Basisvektoren $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ eines neuen Koordinatensystems $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.
   a) Bestimmen Sie die Basisvektoren $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$ sowie einen Basisvektor $\overrightarrow{e_3}$ so, dass $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ eine Orthonormalbasis B_1 des $\mathbb{R}^3$ bilden. **[4 BE]**
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S bezüglich dieses neuen Koordinatensystems. Welches Volumen V* hat die Pyramide ABCS in diesem neuen Koordinatensystem? **[7 BE]**

Arbeitszeit: [illegible]5 Minuten **Gesamt: [40 BE]**