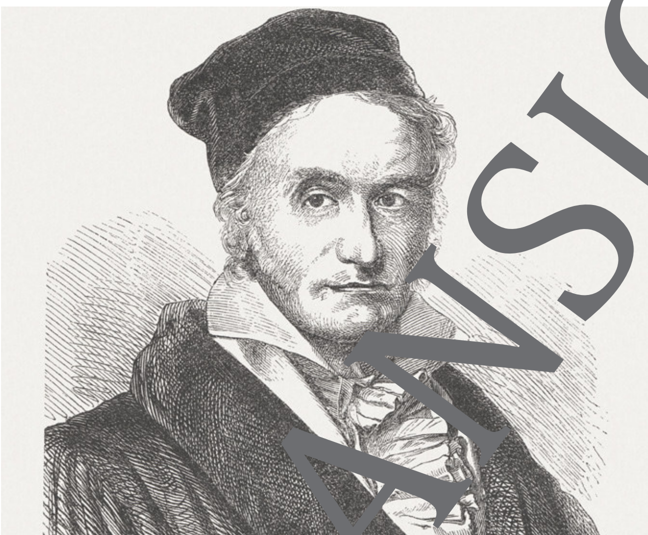
Lineare Gleichungssysteme lösen – Gauß-Verfahren und Cramersche Regel

Ein Beitrag von Dr. Wolfgang Tews



verändert nach: © ZU_09/DigitalVision Vectors/Getty Images Plus

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit linearen Gleichungssystemen und stellt zwei Lösungsverfahren vor. Beim Gauß-Verfahren formen die Schülerinnen und Schüler die Gleichungen so um, dass sich die Lösung schließlich leicht bestimmen lässt. Dem gegenüber steht die Cramersche Regel, die eine allgemeine Lösungsformel bietet.

Ausgehend von Beispielen führen Sie die Jugendlichen an die Verallgemeinerung der genannten Verfahren heran und bringen ihnen auch Begriffe wie n-Tupel, Diagonalform oder Matrix näher. Auch die verschiedenen möglichen Lösungsmengen werden diskutiert.

Lineare Gleichungssysteme lösen – Gauß-Verfahren und Cramersche Regel

Oberstufe

Ein Beitrag von Dr. Wolfgang Tews

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

das Prinzip des Gauß-Verfahrens zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen (LGS). Es wird eine Beschränkung auf bis zu drei Gleichungen mit drei Variablen vorgenommen. Das Prinzip kann problemlos auf kompliziertere lineare Gleichungssysteme übertragen werden. Im Anschluss an Aufgaben und Lösungen wird die Cramersche Regel behandelt. Damit haben die Lernenden die Möglichkeit, unterschiedliche Lösungsverfahren zu vergleichen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Additionsverfahren	M 1	Ab
Lösungsmenge	M 2	Ab
Gauß-Verfahren	M 3	Ab
Aufgaben	M 4	Ab
Lösungen	M 5	Ab
Determinanten und Cramersche Regel	M 6	Ab
Lernerfolgskontrolle	M 7	LEK
Lösungen	M 8	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Kompetenzprofil:

Inhalt: Lineare Gleichungssysteme (LGS), Additionsverfahren, Lösungsmenge, Gauß-Verfahren, Determinanten, Regel von Sarrus, Cramersche Regel

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), Kommunizieren (K6)

Hinweise

Niveau: Die Materialien **M1** und **M2** haben einfaches und **M3**, **M4** und **M5** ein mittleres Niveau. **M6** hat ein schwieriges Niveau.

Hinweise zu den Materialien:

Das Gauß-Verfahren ist eine algorithmische Prozedur zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Viele Probleme, z.B. der Analytischen Geometrie, führen zu Gleichungssystemen, daher empfiehlt es sich, das Lösungsverfahren sicher zu beherrschen. Zur Einführung wird das Additionsverfahren zur Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Variablen wiederholt.

Methodisch-didaktische Hinweise

Das sichere Lösen **l**inearer **G**leichungs**s**ysteme (LGS) mit zwei Variablen und zwei Gleichungen mit dem Additionsverfahren ist Voraussetzung für die Beherrschung des Gauß-Verfahrens. Dieses Verfahren wird in der Literatur in verschiedenen Varianten praktiziert. Im Folgenden werden diese vorgestellt und durch geeignete Übungen vertieft. Die Vorgehensweise orientiert sich i. W. an innermathematischen Motivationen. Nach der Behandlung des Gauß-Verfahrens für zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen erfolgt die Erweiterung auf drei lineare Gleichungen mit drei Variablen. Aufgaben und Lösungen schließen die Behandlung ab.

Im Anschluss erfolgt eine knappe Einführung in 2x2- und 3x3-Determinanten sowie in die Cramersche Regel zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Damit erhalten die Lernenden die Möglichkeit, zwei unterschiedliche Verfahren zu vergleichen. So können sie ihre Kenntnisse auf einem weiteren, höheren Niveau festigen.

M1 Additionsverfahren

Begriffe und Beispiel

Ein System mit zwei linearen Gleichungen und zwei Variablen hat die allgemeine Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Die a_{ij} und b_i sind mit i = 1, 2 und j = 1, 2 Zahlen aus $\mathbb{R}$ und werden als **Koeffizienten** des LGS bezeichnet. Die Zahlen b_i stellen jeweils die rechte Seite des LGS dar. Sind alle b_i gleich Null, so heißt das LGS **homogen**, sind nicht alle b_i gleich Null, heißt das LGS **inhomogen**. Die Variablen erhalten oft auch die Bezeichnungen x bzw. y oder werden bei Anwendungsaufgaben mit anderen geeigneten Buchstaben belegt.

Ein LGS zu lösen bedeutet, mit Hilfe von geeigneten Äquivalenzumformungen eine **Lösungsmenge** L aller geordneten Zahlenpaare (**2-Tupel** $(x_1|x_2)$ von Zahlen aus $\mathbb{R}$ zu finden. Diese führen beim Einsetzen in die zwei Gleichungen des LGS zu wahren Aussagen.

Homogene LGS haben immer genau eine Lösung [illegible] für i=1, 2

(Anmerkung: Dies gilt auch für LGS mit mehr als zwei Variablen.)

Inhomogene LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen haben entweder

– genau eine Lösung oder
– unendlich viele Lösungen oder
– keine Lösung.

Beispiel

Löse das LGS:

y	=	−2x	+	1	(I)
−5	+	3x	=	−2y	(II)

Schritt 1: Ordnen - Terme mit Variablen **geordnet** auf eine Seite, Zahlen auf die andere Seite

2x	+	y	=	1	(I)
3x	+	2y	=	5	(II)