

# Übungsaufgaben: Ebenen und Geraden, Kugeln und Lagebeziehungen

Ein Beitrag von Alfred Müller



© RoyalSpirit / iStock / Getty Images Plus

Dieser Beitrag bietet zwei Übungsaufgaben, in denen Ihre Schülerinnen und Schüler mit Ebenen und Geraden arbeiten. Nach der Untersuchung eines Würfels oder eines Dreiecks befassen sie sich intensiv mit Kugeln. Dabei berechnen sie Lagebeziehungen sowohl zwischen einer Kugel und einer Ebene als auch zwischen zwei Kugeln. Ferner bestimmen sie Berührungspunkte und Tangentialebenen sowie Schnittkreise.

Für realistische Prüfungsbedingungen sorgen eine Zeitvorgabe für jeden der beiden Tests sowie ein Bewertungsschlüssel.

# Übungsaufgaben: Ebenen und Geraden, Würfel und Kugel

## Oberstufe (grundlegend)

Ein Beitrag von Alfred Müller

M1 Würfel und Kugeln	1
M2 Dreieck und Kugeln	2
Bewertungsschlüssel	3
Lösungen	4

## Die Schülerinnen und Schüler sollen

mit den Werkzeugen der Analytischen Geometrie sowohl einen Würfel oder ein Dreieck als auch Ebenen und Kugeln untersuchen. Sie bestimmen die Lage zweier Kugeln zueinander bzw. zwischen einer Kugel und einer Ebene. Ferner berechnen sie Schnittkreise sowie Berührungspunkte und Tangentialebenen.

## Überblick

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

Thema	Material	Methoden
Geraden	M1, M2	AB
Ebenen	M1, M2	AB
Kugel	M1, M2	AB
Tangentialebene und Berührungspunkt	M1, M2	AB
Schnittkreis	M1, M2	AB
Lagebeziehung zwischen Kugeln	M1	AB
Lagebeziehung zwischen Kugel und Ebene	M1, M2	AB
Würfel	M1	AB
Dreieck	M2	AB
Innenwinkel	M2	AB
Schwerpunkt	M2	AB

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Koordinaten, Punkte, Vektoren, Gerade, Ebene, Parameterform, Normalenform, Hesse-Form, Würfel, Dreieck, Kugel, Schnittpunkt, Berührungspunkt, Tangentialebene, Schnittkreis, Lagebeziehungen, Winkel

**Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

## Würfel und Kugeln

M1

1. Die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$  und  $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 2 \end{pmatrix}$  stehen paarweise aufeinander senkrecht.
- Zeigen Sie dies für die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{c}$ , berechnen Sie dann  $p_1$  und  $p_2$  mit den Koordinaten  $p_1$  und  $p_2$ . Zeigen Sie, dass alle Vektoren den gleichen Betrag besitzen. **[3 BE]**
  - Ein Würfel OABCPDEF wird durch die Ortsvektoren  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  und  $\vec{OP} = \vec{p}$  bestimmt. Zeichnen Sie ein Schrägbild des Würfels, bestimmen die Ortsvektoren  $\vec{b}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$ ,  $\vec{f}$  in Abhängigkeit von  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{p}$  und geben Sie die Koordinaten der Würfelpunkte an. **[4 BE]**
  - Die Würfelpunkte A, P und C bestimmen die Ebene  $E_1$ . Geben Sie eine Gleichung von  $E_1$  in Normalenform an. **[3 BE]**
2. Das Lot vom Ursprung O auf die Ebene  $E_1$  ist der Durchmesser einer Kugel  $K_1$ .
- Stellen Sie eine Gleichung der Kugel  $K_1$  auf und berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes Q mit der Ebene  $E_1$ . **[4 BE]**
  - Berechnen Sie a so, dass die Gerade  $g: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$  parallel zur Ebene  $E_1$  ist und zeigen Sie dann, dass dann die Gerade g Tangente an die Kugel  $K_1$  ist. **[4 BE]**
3. Eine Kugel  $K_2$  um den Punkt P geht durch den Ursprung.
- Stellen Sie die Gleichung der Kugel  $K_2$  auf und bestimmen Sie den Mittelpunkt R und den Radius r des Schnittkreises der Kugel  $K_2$  mit der Ebene  $E_1$ . **[5 BE]**
  - Welche gegenseitige Lage besitzen die Kugeln  $K_1$  und  $K_2$ ? **[4 BE]**
4. Gegeben ist ferner die Ebene  $E_2: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 14 = 0$
- Welche gegenseitige Lage hat die Ebene  $E_2$  zur Kugel  $K_1$ ? **[4 BE]**
  - Eine Kugel  $K_3$ , die die Ebene  $E_2$  als Tangentialebene besitzt und deren Mittelpunkt M  $(m_1 | m_2 | m_3)$  von  $E_2$  den Abstand  $d = -3$  LE besitzt, geht noch durch den Punkt  $P(2 | 3 | 1)$ . Bestimmen Sie eine Gleichung von  $K_3$ . **[8 BE]**

Arbeitszeit: 45 Minuten

Gesamt: [40 BE]

# Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 5.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Webinare und Videos**  
für Ihre fachliche und  
persönliche Weiterbildung



**Attraktive Vergünstigungen**  
für Referendar:innen mit  
bis zu 15% Rabatt



**Käuferschutz**  
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**